Корни многочленов. Теоремы Безу и Виета.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $(x-a)$ равен $P(a)$.

Следствие 1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — попарно различные числа. Тогда многочлен $P(x)$ кратен многочлену $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$ тогда и только тогда, когда $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — корни многочлена $P(x)$.

Определение. *Кратностью* корня a многочлена $P(x)$ называется наибольшее натуральное число k, такое что $P(x)$ кратно $(x-a)^k$.

Следствие 2. У ненулевого многочлена степени n не более n корней, с учетом кратности.

Теорема Виета. Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

1. Числа x, y, z удовлетворяют равенству

$$x + y + z - 2(xy + yz + zx) + 4xyz = \frac{1}{2}.$$

Докажите, что хотя бы одно из чисел равно $\frac{1}{2}$.

2. Полина записала на доску 2024 числа. После этого она увеличила каждое число на 1, и произведение чисел не изменилось. Затем она снова увеличила каждое из чисел на 1, и произведение все еще осталось тем же самым. Такая процедура повторялась k раз, и каждый раз произведение сохранялось. Чему равно максимально возможное k?

3. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые квадратные трехчлены. Функция $f(x) = P(x)/Q(x)$ принимает значение равное n^3 при всех натуральных $x = n$ на промежутке от 1 до 5 включительно. Найдите, чему равно $f(0)$.

4. Известно, что для рациональных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выражения

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

являются целыми для всех $k = 1, \ldots, n$. Докажите, что тогда все исходные числа целые.

5. На доске написано несколько приведённых многочленов n-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ и заменить их на такие два приведённых многочлена n-й степени $P_2(x)$ и $Q_2(x)$, что $P_1(x)+Q_1(x) = P_2(x)+Q_2(x)$ или $P_1(x)Q_1(x) = P_2(x)Q_2(x)$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет n различных положительных корней.

6. Найдите все такие многочлены $Q(x)$, что $Q(x-1) = Q(x) - 2x + 1$.

7. Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три неотрицательных корня, каждый из которых не превосходит 2. Докажите, что

$$-2 \leqslant a + b + c \leqslant 0.$$

8. Сколько существует различных многочленов, удовлетворяющих трём данным требованиям:

- все коэффициенты равны ± 1,
- количество вещественных корней совпадает со степенью многочлена,
- степень многочлена не равна 3?

9. Найдите все такие многочлены $Q(x)$, что $Q(x)^2 = 2Q(2x^2-1) + 2$.