Диагностическая работа. Очный этап. Решения

1. Ваня задумал натуральное число от 1 до 50. Серёжа задаёт Ване вопросы вида «Делится ли задуманное число на n?». Ваня отвечает на вопросы честно. Какое наименьшее число вопросов понадобится Серёже, чтобы наверняка узнать загаданное число?

Ответ: 15 вопросов.

Решение. Среди чисел от 1 до 50 ровно 15 простых. Если Серёжа не спросит про какое-то простое p из них, то он с помощью ответов Вани не сможет отличить число p от 1. Таким образом, Серёже необходимо задать как минимум 15 вопросов.

Докажем, что 15 вопросов хватит. Заметим, что максимально возможное количество простых множителей, на которые может раскладываться наше число, равно 5, поскольку $2^6 > 50$. Будем выяснять степень вхождения в загаданное число каждого простого p, начиная с двойки. Для этого будем задавать вопросы вида «Делится ли задуманное число на p^k?», начиная с $k = 1$, пока не получим ответ «нет».

Заметим, что для того, чтобы выяснить степени вхождения чисел 2, 3, 5, 7 в загаданное число нам понадобится не более 9 вопросов, поскольку мы не можем получить больше 5 ответов «да», а ответов «нет» мы не получим больше 4.

- Если среди ответов на вопросы про степени вхождения чисел 2, 3, 5, 7 есть хотя бы один ответ «да», то загаданное число не может делиться на простые, большие 25. При этом любое простое, большее 7, входит в наше число не более чем в первой степени. Значит, нам нужно задать ещё не более 5 вопросов про числа 11, 13, 17, 19, 23. Таким образом, в этом случае нам хватит 14 вопросов.
- Если среди ответов на вопросы про степени вхождения 2, 3, 5, 7 нет ответов «да», то было задано всего 4 вопроса. А значит у нас осталось 11 простых чисел, каждое из которых входит в загаданное число не более чем в первой степени, и 11 вопросов.

Таким образом, за 15 вопросов мы сможем однозначно определить загаданное число.

2. Пусть n — чётное натуральное число. Лёша записал в каждую клетку таблицы $n \times n$ знак «+» и «−» так, чтобы количество плюсов совпадало с количеством минусов. Докажите, что в этой таблице есть или две строки, или два столбца с одинаковым количеством плюсов.

Решение. Поскольку количество плюсов должно быть равно количество минусов, то и плюсов, и минусов в таблице $\frac{n^2}{2}$. Предположим, что во всех строках таблицы разное количество плюсов. Тогда найдётся строка со всеми плюсами, так как иначе количество плюсов не превосходит

$$0 + 1 + \ldots + (n-1) = \frac{n^2 - n}{2} < \frac{n^2}{2}.$$

Аналогично найдётся столбец со всеми минусами. Рассмотрев пересечение этих строки и столбца, получаем противоречие. Значит у нас есть либо две строки с одинаковым количеством плюсов, либо два столбца с одинаковым количеством минусов, а значит и с одинаковым количеством плюсов. Что и требовалось доказать.

3. Прямая ℓ проходит через вершину A треугольника ABC перпендикулярно медиане треугольника, выходящей из точки A. Серединные перпендикуляры к сторонам этого треугольника пересекают прямую ℓ в трёх точках. Докажите, что одна из них является серединой отрезка с концами в двух оставшихся.

Решение. Обозначим точку пересечения серединных перпендикуляров через O, середину стороны BC обозначим через M. Пусть A_1 — точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне BC с прямой ℓ. Аналогично обозначим точки B_1, C_1. Докажем, что $B_1A_1 = C_1A_1$.

Заметим, что $\angle A_1OB_1 = \angle ACB$ и $\angle A_1B_1O = \angle MAC$, поскольку стороны углов взаимно перпендикулярны. Аналогично $\angle C_1OA_1 = \angle ABC$ и $\angle A_1C_1O = \angle BAM$. Тогда треугольник AMC подобен треугольнику B_1A_1O, а треугольник AMB подобен треугольнику C_1A_1O. Из подобия следует, что

$$\frac{C_1A_1}{AM} = \frac{A_1O}{BM} \quad \text{и} \quad \frac{A_1O}{MC} = \frac{A_1B_1}{AM}.$$

Но $BM = MC$, поэтому $\frac{C_1A_1}{AM} = \frac{A_1B_1}{AM}$, откуда $C_1A_1 = A_1B_1$. Что и требовалось доказать.

4. Пусть p и q — простые числа такие, что $p^2 + pq + q^2$ является точным квадратом. Докажите, что тогда число $p^2 - pq + q^2$ простое.

Решение. Положим $p^2 + pq + q^2 = n^2$. Тогда $(p+q)^2 - n^2 = pq$, то есть

$$pq = (p + q + n)(p + q - n).$$

Левую часть можно представить в виде произведения двух натуральных чисел двумя способами:

$$pq = 1 \cdot pq = p \cdot q.$$

Заметим, что $p + q + n$ больше каждого из чисел p и q. Следовательно, $p+q+n = pq$ и $p+q-n = 1$. Выразим из второго равенства n и подставив в первое, получим

$$2p + 2q - 1 = pq \iff (p-2)(q-2) = 3.$$

Одна из скобок в левой части полученного равенства должна быть равна 1, а другая — 3. Поэтому одно из чисел p и q равно 3, а другое — 5. Тогда

$$p^2 + q^2 - pq = 19.$$

Число 19 простое. Что и требовалось доказать

5. В классе учится 20 человек. Каждый школьник дружит ровно с тремя одноклассниками. Пятеро из них купили билеты на концерт. Если среди друзей школьника хотя бы двое купили билеты на концерт, то он тоже идёт покупать билет. Может ли так оказаться, что спустя какое-то время весь класс купит билеты на концерт?

Ответ: Нет, не могло.

Решение. Построим граф, вершины которого — школьники, два школьника соединены ребром, если они дружат. Будем красить красным цветом школьников, которые купили билет, а белым — которые ещё не купили.

Пусть N — количество вершин красного цвета, плюс количество разноцветных рёбер (то есть рёбер между вершинами красного и белого цвета). Заметим, что изначально $N \leqslant 20$, поскольку из 5 покрашенных в красный цвет вершин выходит ровно 15 рёбер (но не все из них обязаны быть разноцветными).

При перекраске любой вершины N не увеличивается, поскольку если мы перекрашиваем какую-то вершину, то до её покраски в неё входило хотя бы два разноцветных ребра. После перекрашивания мы получаем дополнительную красную вершину и не более одного нового разноцветного ребра, при этом хотя бы два разноцветных ребра мы обязательно потеряем.

Предположим, что мы смогли перекрасить все вершины. Тогда рассмотрим момент, когда мы перекрасили все вершины, кроме одной. В этот момент N принимает значение 22, поскольку у нас 19 красных вершин и 3 разноцветных ребра, выходящих из единственной белой вершины. Но $22 > 20$. Противоречие.

6. Последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}$ таковы, что для каждого натурального n

$$a_n > 0, \quad b_n > 0$$

и

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n}, \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n}.$$

Докажите, что $a_{50} + b_{50} > 20$.

Решение. Пусть $c_n = a_n b_n$. Заметим, что $c_{n+1} = c_n + \frac{1}{c_n} + 2$. В таком случае

$$c_{50} = \sum_{i=2}^{49} \frac{1}{c_i} + c_1 + \frac{1}{c_1} + 2 \cdot 49 > c_1 + \frac{1}{c_1} + 2 \cdot 49 \geqslant 100.$$

Тогда из неравенства о средних для двух чисел следует, что

$$\frac{a_{50} + b_{50}}{2} \geqslant \sqrt{a_{50} b_{50}} = \sqrt{c_{50}} > 10.$$

Получаем, что $a_{50} + b_{50} > 20$. Что и требовалось доказать.