

Московские летние сборы

31 мая – 10 июня 2025 г., 8 класс

Материалы занятий

Содержание

I	Алгебра	4
1	8-1	5
	Неравенство Коши—Буняковского—Шварца	5
	Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. Добавка.	7
	Многочлены с целыми коэффициентами	8
	Многочлены с целыми коэффициентами. Добавка.	9
	Квадратичные вычеты.	10
	Квадратичные вычеты. Добавка.	11
	Показатели.	12
2	8-2	13
	Неравенство Коши—Буняковского—Шварца	13
	Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. Добавка.	15
	Многочлены с целыми коэффициентами	16
	Многочлены с целыми коэффициентами. Добавка.	17
	Квадратичные вычеты.	18
	Квадратичные вычеты. Добавка.	19
	Показатели.	20
	Показатели. Добавка	21
3	8-3	22
	Неравенство Коши—Буняковского—Шварца	22
	Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. Добавка.	24
	Многочлены с целыми коэффициентами	25
	Многочлены с целыми коэффициентами. Добавка.	26
	Квадратичные вычеты.	27
	Квадратичные вычеты. Добавка.	28
	Показатели.	29
II	Геометрия	30
1	8-1	31
	Вспоминаем движения	31
	Добавка	32

Движения плоскости и их композиции	33
Добавка	34
Композиции поворотов	35
Гомотетия	37
Добавка	38
Гомотетия-2	39
2 8-2	40
Вспоминаем движения	40
Добавка	41
Композиции движений	42
Добавка	43
Композиции поворотов	44
Гомотетия	46
Гомотетия-2	47
3 8-3	48
Движения плоскости	48
Добавка	49
Композиции движений	50
Добавка	51
Композиции поворотов	52
Добавка	53
Гомотетия	54
Добавка	55
Гомотетия-2	56
III Комбинаторика	57
1 8-1	58
Лемма Холла	59
Лемма Кёнига	61
Лемма Холла. Практика	62
Лемма Холла. Практика. Добавка	63
Алгебраические конструкции в комбинаторике	64
Кооперативные стратегии	65
Кооперативные стратегии. Добавка	67
Кооперативные стратегии-2	68
2 8-2	69
Лемма Холла	70
Лемма Холла. Практика	72
Лемма Холла. Практика. Добавка	73
Алгебраические конструкции в комбинаторике	74
Кооперативные стратегии	75

Кооперативные стратегии-2	77
3 8-3	78
Лемма Холла	79
Лемма Холла. Практика	81
Лемма Холла. Практика. Добавка	82
Алгебраические конструкции в комбинаторике	83
Кооперативные стратегии	84
Кооперативные стратегии-2	86

Часть I

Алгебра

Неравенство Коши—Буняковского—Шварца

Неравенство КБШ. Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы чисел a_i и b_i пропорциональны (или один из наборов нулевой).

1. Докажите неравенство КБШ.

2. **Лемма Титу (КБШ для дробей).** Для вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и вещественных положительных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ докажите, что

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите, что:

$$(a) \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)};$$

$$(б) \quad \frac{a^2(b+c)}{bc} + \frac{b^2(a+c)}{ac} + \frac{c^2(a+b)}{ab} \geq 2(a+b+c);$$

$$(в) \quad \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2} \leq 3.$$

4. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \dots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geq (1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n)$$

5. При каких значениях переменных достигается минимум выражения $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, если известно, что $3a - 4b + 8c - 44d = 2025$?

6. **Неравенство Несбитта.** Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

7. Для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ таких, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, докажите неравенство:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

8. Для положительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. Добавка.

1. Для положительных чисел a, b, c докажите, что $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1$.
2. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{3}{2}.$$

3. Пусть a, b, c — стороны некоторого треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1$$

4. Пусть $ab + bc + ac \leq 1$. Докажите, что

$$a + b + c + \sqrt{3} \geq 8abc \left(\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \right)$$

Многочлены с целыми коэффициентами

- (Целочисленная теорема Безу)** Докажите, что если $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, а a и b – различные целые числа, то $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.
- Пусть несократимая ненулевая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем ненулевого многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами.
 - Докажите, что a_0 делится на p , а a_n делится на q .
 - Докажите, что при любом целом k значение $P(k)$ кратно числу $qk - p$.
- Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.
- На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
- Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что при всех целых n число $P(P(n)) - Q(Q(n))$ делится на $P(n) - Q(n)$, если $P(n) \neq Q(n)$.
- Докажите, что для любого непостоянного многочлена $P(x)$ с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k , что числа $P(k), P(k+1), \dots, P(k+2025)$ будут составными.
- Существует ли многочлен (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающий при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу?
- Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

Многочлены с целыми коэффициентами. Добавка.

1. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 10$ с целыми коэффициентами. Докажите, что у уравнения $P(x)^2 = 1$ не более n целых решений.
2. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .
3. Существует ли многочлен степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом?
4. Докажите, что если некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в 2025 целых точках значения среди чисел от 1 до 2024, то эти значения равны.
5. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2025 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \dots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

Квадратичные вычеты.

(Малая теорема Ферма) Пусть p — простое число и a не делится на p . Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Зафиксируем простое число p . Для числа a , не делящегося на p , рассмотрим сравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Если это сравнение имеет решение, то число a называется *квадратичным вычетом* по модулю p , в противном случае — *квадратичным невычетом* по модулю p . Достаточно часто слово «квадратичный» мы будем опускать.

1. Пусть $p > 2$. Докажите, что
 - (а) по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов;
 - (б) произведение двух квадратичных вычетов — вычет;
 - (в) произведение вычета на невычет — невычет;
 - (г) произведение двух невычетов — вычет.
2. По кругу сидят p обезьянок, где p — простое число. Дрессировщик раздаёт обезьянкам p орехов по следующему правилу. Одна из обезьянок получает первый орех, второй орех получает обезьянка, сидящая через две от первой против часовой стрелки (т.е. третья по счёту), третий — обезьянка, сидящая через четыре против часовой стрелки от обезьянки, получившей второй орех, ... , k -й орех получает обезьянка, сидящая через $2(k-1)$ от обезьянки, получившей $(k-1)$ -й орех, и так пока орехи не кончатся. Сколько обезьянок не получают ни одного ореха?
3. Докажите, что число p является делителем числа вида $x^2 - x + 3$ тогда и только тогда, когда оно является делителем числа вида $y^2 - y + 25$.
4.
 - (а) Докажите, что если $x^2 + 1$ делится на p , то p имеет вид $4k + 1$.
 - (б) Простое число $p = 4k + 3$, а целые числа x и y таковы, что $x^2 + y^2$ делится на p . Докажите, что тогда x и y делятся на p .
5. Решите в целых числах уравнение $z(y^2 - 5) = x^2 + 1$.
6. Рассмотрим наименьшее натуральное число q , для которого q — невычет по модулю p . Докажите, что $q < \sqrt{p} + 1$. (Указание. Докажите, что $q, 2q, \dots, (q-1)q \leq p$.)

Квадратичные вычеты. Добавка.

1. Решите уравнение $x^3 - 4x^2 + 8 = y^2 + x^2$ в целых числах.
2. Пусть $p \equiv 3 \pmod{4}$, $p > 3$. Известно, что p и $q = 2p + 1$ — простые числа. Докажите, что $2^p - 1$ составное.
3. Пусть $p > 2$ — простое число. Во время урока учитель выписал на доску числа $1, 4, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, а Петя прибавил к каждому из них 2025 и записал их себе в тетрадку. На перемене он посчитал количество чисел в тетрадке, для которых можно найти число с доски такое, что их разность делится на p , и вычел из них количество оставшихся в тетрадке чисел. Какое число могло получиться у Пети?
4. Пусть p, q — простые числа. Докажите, что из каждого остатка по модулю p извлекается корень степени q тогда и только тогда, когда q не делит $p - 1$.

Показатели.

Определение. Даны натуральные числа a и n , такие что $(a, n) = 1$. Показателем числа a по модулю n называется такое наименьшее натуральное число d , что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

1. Пусть p — простое число, d — один из делителей числа $p - 1$. Выберем из остатков $1, \dots, p - 1$ те, чей показатель по модулю p равен d . Чему равен остаток произведения всех выбранных чисел по модулю p ?
2. Докажите, что простые делители числа $2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$ имеют вид $2^{n+1}x + 1$, где $x \in \mathbb{N}$.
3. Известно, что число n^{42} дает остаток 1 по модулю 2025. Чему может быть равен остаток числа n по модулю 2025?
4. Пусть p, q — простые числа, $q > 5$. Докажите, что если $2^p + 3^p$ делится на q , то $q > p$.
5. Пусть $N = 2^a 3^b + 1$, где a, b — натуральные числа. Предположим, что для некоторого натурального c число $c^{(N-1)/3} - c^{(N-1)/6} + 1$ кратно N . Докажите, что N — простое.
6. Докажите, что $3^n - 2^n$ не может делиться на n ни для какого натурального $n > 1$.
7. (а) Пусть $a > 1$, $p > 2$ простое число. Докажите, что все нечетные простые делители числа $a^p - 1$ либо делят $a - 1$, либо имеют вид $2px + 1$, где $x \in \mathbb{N}$.
(б) Выведите отсюда, что простых чисел вида $2px + 1$ бесконечно много.
8. Найдите все тройки простых чисел p, q, r , такие что $r \mid p^q + 1$, $p \mid q^r + 1$, $q \mid r^p + 1$.
9. Решите в целых числах уравнение $\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$.

Неравенство Коши—Буняковского—Шварца

Неравенство КБШ. Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы чисел a_i и b_i пропорциональны (или один из наборов нулевой).

1. Докажите неравенство КБШ.

2. **Лемма Титу (КБШ для дробей).** Для вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и вещественных положительных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ докажите, что

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите, что:

(а) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$;

(б) $\frac{a^2(b+c)}{bc} + \frac{b^2(a+c)}{ac} + \frac{c^2(a+b)}{ab} \geq 2(a+b+c)$;

(в) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2} \leq 3$.

4. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \dots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geq (1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n)$$

5. При каких значениях переменных достигается минимум выражения $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, если известно, что $3a - 4b + 8c - 44d = 2025$?

6. **Неравенство Несбитта.** Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

7. Для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ таких, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, докажите неравенство:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

8. Для положительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. Добавка.

1. Для положительных чисел a, b, c докажите, что $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1$.
2. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{3}{2}.$$

3. Пусть a, b, c — стороны некоторого треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1$$

Многочлены с целыми коэффициентами

1. **(Целочисленная теорема Безу)** Докажите, что если $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, а a и b — различные целые числа, то $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.
2. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2025$, $P(2025) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k .
3. Пусть несократимая ненулевая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем ненулевого многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами.
(а) Докажите, что a_0 делится на p , а a_n делится на q .
(б) Докажите, что при любом целом k значение $P(k)$ кратно числу $qk - p$.
4. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.
5. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
6. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что при всех целых n число $P(P(n)) - Q(Q(n))$ делится на $P(n) - Q(n)$, если $P(n) \neq Q(n)$.
7. Докажите, что для любого непостоянного многочлена $P(x)$ с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k , что числа $P(k), P(k+1), \dots, P(k+2025)$ будут составными.
8. Существует ли многочлен (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающий при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу?

Многочлены с целыми коэффициентами. Добавка.

1. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 10$ с целыми коэффициентами. Докажите, что у уравнения $P(x)^2 = 1$ не более n целых решений.
2. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .
3. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?
4. Существует ли многочлен степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом?

Квадратичные вычеты.

(Малая теорема Ферма) Пусть p — простое число и a не делится на p . Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Зафиксируем простое число p . Для числа a , не делящегося на p , рассмотрим сравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Если это сравнение имеет решение, то число a называется *квадратичным вычетом* по модулю p , в противном случае — *квадратичным невычетом* по модулю p . Достаточно часто слово «квадратичный» мы будем опускать.

1. Пусть $p > 2$. Докажите, что
 - (а) по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов;
 - (б) произведение двух квадратичных вычетов — вычет;
 - (в) произведение вычета на невычет — невычет;
 - (г) произведение двух невычетов — вычет.
2. По кругу сидят p обезьянок, где p — простое число. Дрессировщик раздаёт обезьянкам p орехов по следующему правилу. Одна из обезьянок получает первый орех, второй орех получает обезьянка, сидящая через две от первой против часовой стрелки (т.е. третья по счёту), третий — обезьянка, сидящая через четыре против часовой стрелки от обезьянки, получившей второй орех, ..., k -й орех получает обезьянка, сидящая через $2(k-1)$ от обезьянки, получившей $(k-1)$ -й орех, и так пока орехи не кончатся. Сколько обезьянок не получают ни одного ореха?
3. Докажите, что число p является делителем числа вида $x^2 - x + 3$ тогда и только тогда, когда оно является делителем числа вида $y^2 - y + 25$.
4.
 - (а) Докажите, что если a квадратичный вычет, то и a^{-1} тоже.
 - (б) Докажите, что -1 является квадратичным вычетом по простому нечётному модулю p тогда и только тогда, когда p имеет вид $4k + 1$.
 - (в) Простое число $p = 4k + 3$, а целые числа x и y таковы, что $x^2 + y^2$ делится на p . Докажите, что тогда x и y делятся на p .
5. Решите в целых числах уравнение $z(y^2 - 5) = x^2 + 1$.
6. Рассмотрим наименьшее натуральное число q , для которого q — невычет по модулю p . Докажите, что $q < \sqrt{p} + 1$. (Указание. Докажите, что $q, 2q, \dots, (q-1)q \leq p$.)
7. Докажите, что для любого p найдутся x и y такие, что $x^2 + y^2 + 2015$ делится на p .

Квадратичные вычеты. Добавка.

1. Решите уравнение $x^3 - 4x^2 + 8 = y^2 + x^2$ в целых числах.
2. Пусть $p > 2$ — простое число. Во время урока учитель выписал на доску числа $1, 4, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, а Петя прибавил к каждому из них 2025 и записал их себе в тетрадку. На перемене он посчитал количество чисел в тетрадке, для которых можно найти число с доски такое, что их разность делится на p , и вычел из них количество оставшихся в тетрадке чисел. Какое число могло получиться у Пети?
3. Докажите, что из каждого остатка по модулю $p > 2$ извлекается кубический корень тогда и только тогда, когда -3 не является квадратичным вычетом по модулю p .
4. Пусть p, q — простые числа. Докажите, что из каждого остатка по модулю p извлекается корень степени q тогда и только тогда, когда q не делит $p - 1$.
(Указание: рассмотрите множество $\{1^q, 2^q, \dots, (p-1)^q\}$)

Показатели.

Определение. Даны натуральные числа a и n , такие что $(a, n) = 1$. Показателем числа a по модулю n называется такое наименьшее натуральное число d , что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

1. Пусть p — простое число, d — один из делителей числа $p - 1$. Выберем из остатков $1, 2, \dots, p - 1$ те, чей показатель по модулю p равен d . Чему равен остаток произведения всех выбранных чисел по модулю p ?
2. Найдите все простые p и q такие, что $p \mid 2^q - 1$ и $q \mid 2^p - 1$.
3. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.
4. Известно, что число n^{42} дает остаток 1 по модулю 2025. Чему может быть равен остаток числа n по модулю 2025?
5. Докажите, что простые делители числа $2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$ имеют вид $2^{n+1}x + 1$, где $x \in \mathbb{N}$.
6. Пусть p, q — простые числа, $q > 5$. Докажите, что если $2^p + 3^p$ делится на q , то $q > p$.
7. Пусть $N = 2^a 3^b + 1$, где a, b — натуральные числа. Предположим, что для некоторого натурального c число $c^{(N-1)/3} - c^{(N-1)/6} + 1$ кратно N . Докажите, что N — простое.
8. (а) Пусть $a > 1$, $p > 2$ простое число. Докажите, что все нечетные простые делители числа $a^p - 1$ либо делят $a - 1$, либо имеют вид $2px + 1$, где $x \in \mathbb{N}$.
(б) Выведите отсюда, что простых чисел вида $2px + 1$ бесконечно много.

Показатели. Добавка

1. Докажите, что $3^n - 2^n$ не может делиться на n ни для какого натурального $n > 1$.
2. Найдите все тройки простых чисел p, q, r , такие что $r \mid p^q + 1$, $p \mid q^r + 1$, $q \mid r^p + 1$.
3. Решите в целых числах уравнение $\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$.

Неравенство Коши—Буняковского—Шварца

Неравенство КБШ. Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы чисел a_i и b_i пропорциональны (или один из наборов нулевой).

1. Рассмотрев квадратное уравнение $(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 = 0$, докажите неравенство КБШ.
2. Используя КБШ, докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, а также между средним арифметическим и средним гармоническим.
3. **Лемма Титу (КБШ для дробей).** Для вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и положительных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ докажите, что

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

4. Для положительных чисел a, b, c докажите, что:

$$(a) \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)};$$

$$(б) \quad \frac{a^2(b+c)}{bc} + \frac{b^2(a+c)}{ac} + \frac{c^2(a+b)}{ab} \geq 2(a+b+c);$$

$$(в) \quad \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2} \leq 3.$$

5. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \dots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geq (1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n)$$

6. При каких значениях переменных достигается минимум выражения $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, если известно, что $3a - 4b + 8c - 44d = 2025$?

7. **Неравенство Несбитта.** Для положительных чисел a, b, c докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

8. Для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ таких, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, докажите неравенство:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2 + 1)^2}{n}.$$

Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. Добавка.

1. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Для положительных чисел a, b, c докажите, что $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1$.
3. Пусть a, b, c — стороны некоторого треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1$$

4. Для положительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Многочлены с целыми коэффициентами

1. **(Целочисленная теорема Безу)** Докажите, что если $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, а a и b — различные целые числа, то $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.
2. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2025$, $P(2025) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k .
3. Пусть несократимая ненулевая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем ненулевого многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами. Докажите, что a_0 делится на p , а a_n делится на q .
4. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.
5. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
6. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что при всех целых n число $P(P(n)) - Q(Q(n))$ делится на $P(n) - Q(n)$, если $P(n) \neq Q(n)$.
7. Пусть несократимая ненулевая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем ненулевого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что при любом целом k значение $P(k)$ кратно числу $qk - p$.
8. Докажите, что для любого непостоянного многочлена $P(x)$ с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k , что числа $P(k), P(k + 1), \dots, P(k + 2025)$ будут составными.

Многочлены с целыми коэффициентами. Добавка.

1. Существует ли многочлен (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающий при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу?
2. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 10$ с целыми коэффициентами. Докажите, что у уравнения $P(x)^2 = 1$ не более n целых решений.
3. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .
4. Существует ли многочлен степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом?

Квадратичные вычеты.

(Малая теорема Ферма) Пусть p — простое число и a не делится на p . Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

1. Докажите, что для каждого ненулевого остатка a по модулю p найдётся такой остаток a^{-1} , что $aa^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Зафиксируем простое число p . Для числа a , не делящегося на p , рассмотрим сравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Если это сравнение имеет решение, то число a называется *квадратичным вычетом* по модулю p , в противном случае — *квадратичным невычетом* по модулю p . Достаточно часто слово «квадратичный» мы будем опускать.

2. Пусть $p > 2$. Докажите, что
 - (а) по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов;
 - (б) произведение двух квадратичных вычетов — вычет;
 - (в) произведение вычета на невычет — невычет;
 - (г) произведение двух невычетов — вычет.
3. По кругу сидят p обезьянок, где p — простое число. Дрессировщик раздаёт обезьянкам p орехов по следующему правилу. Одна из обезьянок получает первый орех, второй орех получает обезьянка, сидящая через одну от первой против часовой стрелки (т.е. третья по счету), третий — обезьянка, сидящая через три против часовой стрелки от обезьянки, получившей второй орех, ..., k -й орех получает обезьянка, сидящая через $2(k-1)-1$ от обезьянки, получившей $(k-1)$ -й орех, и так пока орехи не кончатся. Сколько обезьянок не получают ни одного ореха?
4. Докажите, что число p является делителем числа вида $x^2 - x + 3$ тогда и только тогда, когда оно является делителем числа вида $y^2 - y + 25$.
5.
 - (а) Докажите, что если a квадратичный вычет, то и a^{-1} тоже.
 - (б) Докажите, что -1 является квадратичным вычетом по простому нечётному модулю p тогда и только тогда, когда p имеет вид $4k + 1$.
 - (в) Простое число $p = 4k + 3$, а целые числа x и y таковы, что $x^2 + y^2$ делится на p . Докажите, что тогда x и y делятся на p .
6. Найдите все пары целых чисел a и b , при которых $a^2 + 1$ делится на $b^2 - 5$.
7. Рассмотрим наименьшее натуральное число q , для которого q — невычет по модулю p . Докажите, что $q < \sqrt{p} + 1$. (Указание. Докажите, что $q, 2q, \dots, (q-1)q \leq p$.)

Квадратичные вычеты. Добавка.

1. Решите уравнение $x^3 - 4x^2 + 8 = y^2 + x^2$ в целых числах.
2. Докажите, что для любого p найдутся x и y такие, что $x^2 + y^2 + 2015$ делится на p .
3. Пусть $p > 2$ — простое число. Во время урока учитель выписал на доску числа $1, 4, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, а Петя прибавил к каждому из них 2025 и записал их себе в тетрадку. На перемене он посчитал количество чисел в тетрадке, для которых можно найти число с доски такое, что их разность делится на p , и вычел из них количество оставшихся в тетрадке чисел. Какое число могло получиться у Пети?
4. Пусть p, q — простые числа. Докажите, что из каждого остатка по модулю p извлекается корень степени q тогда и только тогда, когда q не делит $p - 1$.
(Указание: рассмотрите множество $\{1^q, 2^q, \dots, (p-1)^q\}$)

Показатели.

Определение. Даны натуральные числа a и n , такие что $(a, n) = 1$. Показателем числа a по модулю n называется такое наименьшее натуральное число d , что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

1. (а) Докажите, что если $a^k - 1$ делится на n , то показатель a по модулю n делит k .
(б) Докажите, что если $a^k - 1$ и $a^l - 1$ делятся на n , то $a^{(k,l)} - 1$ делится на n .
2. Пусть p — простое число, d — один из делителей числа $p - 1$. Выберем из остатков $1, 2, \dots, p - 1$ те, чей показатель по модулю p равен d . Чему равен остаток произведения всех выбранных чисел по модулю p ?
3. Найдите все простые p и q такие, что $p \mid 2^q - 1$ и $q \mid 2^p - 1$.
4. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.
5. Известно, что число n^{42} дает остаток 1 по модулю 1013. Чему может быть равен остаток числа n по модулю 1013?
6. Докажите, что простые делители числа $2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$ имеют вид $2^{n+1}x + 1$, где $x \in \mathbb{N}$.
7. (а) Пусть $a > 1$, $p > 2$ простое число. Докажите, что все нечетные простые делители числа $a^p - 1$ либо делят $a - 1$, либо имеют вид $2px + 1$, где $x \in \mathbb{N}$.
(б) Выведите отсюда, что простых чисел вида $2px + 1$ бесконечно много.

Часть II

Геометрия

Вспоминаем движения

1. В окружности ω с центром O проведены диаметры AB и CD . Касательные к ω в точках A и C пересекаются в точке P . Докажите, что касательные к ω в точках B и D пересекаются на прямой OP .
2. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка P . Пусть H — точка пересечения высот треугольника APD , M — середина AD и N — середина CD . Докажите, что прямые PN и MH перпендикулярны.
3. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ вовне него построен треугольник BSP . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки A на CP , из точки D на BP и из точки P на AD , пересекаются в одной точке.
4. Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. На сторонах BC и CD выбираются точки P и Q такие, что $CP = CQ$. Докажите, что окружности (APQ) проходят через фиксированную точку, отличную от A .
5. Внутри угла с вершиной O отмечена точка M . Постройте на сторонах угла точки X и Y , для которых отрезки OX и OY равны, а сумма $MX + MY$ минимальна.
6. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, отличный от прямоугольника, а точка P выбрана внутри него так, что окружности (PAB) и (PCD) имеют общую хорду, перпендикулярную AD . Докажите, что радиусы данных окружностей равны.
7. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причем $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC .

Добавка

1. В треугольнике ABC проведена высота AD . Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника DHO относительно HO , лежит на средней линии треугольника ABC .
2. Существуют ли на плоскости одновременно не совпадающие точки

$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z,$

для которых четырёхугольники $ABCD, EFGH, IJKL, MNOP, QRST, UVWX, YZAB, CDEF, GHIJ, KLMN, OPQR, STUV$ и $WXYZ$ являются квадратами?

3. **Теорема Монжа.** Докажите, что прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

Движения плоскости и их композиции

Определение. Отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *движением*, если для любых точек P и Q расстояние между ними равно расстоянию между точками $f(P)$ и $f(Q)$.

1. Пусть f — произвольное движение плоскости. **(а)** Докажите, что f инъективно. **(б)** Докажите, что если точки A, B и C лежат на одной прямой, то точки $f(A), f(B)$ и $f(C)$ также лежат на одной прямой.

Примеры движений из предыдущего листочка.

- R_O^φ — поворот с центром в точке O на угол φ **против** часовой стрелки;
- $T_{\vec{v}}$ — параллельный перенос на вектор $\vec{v}$;
- S_ℓ — осевая симметрия относительно прямой ℓ .

Определение. *Скольльзящая симметрия* — это композиция осевой симметрии относительно прямой ℓ и параллельного переноса на вектор, параллельный ℓ .

Пример. Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются под углом φ , то композиция $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ является поворотом на угол 2φ .

2. Чем является композиция $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$, если прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны?
3. Чем является композиция поворота и **(а)** параллельного переноса **(б)** симметрии?
4. **(а)** Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует ровно одно движение, которое переводит один треугольник в другой (соответственные вершины — в соответственные).

(б) Докажите, что любое движение можно представить как композицию не более чем трёх симметрий.

(в) Теорема Шаля. Докажите, что любое движение плоскости — это либо поворот, либо параллельный перенос, либо симметрия, либо скольльзящая симметрия.

5. Даны прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Найдите все движения f такие, что $S_{\ell_1} \circ f = S_{\ell_2}$.
6. Опишите все движения f , для которых **(а)** $f \circ f = f$; **(б)** $f \circ f \circ f = f$.
7. Дан треугольник ABC . Произвольная точка плоскости P последовательно отражается относительно прямых AB, AC и BC . Результат этого преобразования обозначим через $f(P)$. Найдите множество точек P таких, что расстояние между P и $f(P)$ минимально.
8. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 или лежат на одной прямой, или образуют треугольник, подобный ABC .

Добавка

1. В неравностороннем треугольнике ABC провели биссектрису внутреннего угла AA_1 и биссектрису внешнего угла AA_2 . Из точек A_1 и A_2 провели касательные к окружности ω , вписанной в треугольник ABC , отличные от прямой BC . Они касаются ω в точках D_1 и D_2 . Докажите, что точки A , D_1 и D_2 лежат на одной прямой.
2. Пусть ℓ_i , $i = 1, 2, 3$ — три неколлинеарные прямые, образующие треугольник T . Докажите, что для каждой точки P плоскости найдётся такая конечная композиция симметрий $S_{\ell_1}, S_{\ell_2}, S_{\ell_3}$ (одна и та же симметрия может входить в композицию несколько раз), что образ точки P при этой композиции лежит внутри треугольника T .
3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Серединные перпендикуляры $\ell_{AB}, \ell_{BC}, \ell_{CD}$ к отрезкам AB , BC и CD пересекаются в точках $P = \ell_{AB} \cap \ell_{CD}$, $Q = \ell_{AB} \cap \ell_{BC}$ и $R = \ell_{BC} \cap \ell_{CD}$. Точки K и L — основания высот треугольника PQR , опущенных из Q и R соответственно. Докажите, что прямая KL делит отрезок AD пополам.
4. Отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ сохраняет точки на единичном расстоянии, то есть $|PQ| = 1$ тогда и только тогда, когда $|f(P)f(Q)| = 1$. Верно ли, что f — движение?

Композиции поворотов

Факт. Пусть A и B — две различные точки плоскости. Тогда

$$R_B^\beta \circ R_A^\alpha = \begin{cases} R_C^{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{360}, \\ T_{\vec{v}}, & \text{если } \alpha + \beta \equiv 0 \pmod{360}, \end{cases}$$

для некоторой точки C и некоторого вектора $\vec{v}$.

Теорема Наполеона. На сторонах треугольника вовне построены правильные треугольники. Тогда их центры образуют правильный треугольник.

1. На сторонах треугольника ABC вовне построены равносторонние треугольники ABC_1 и ACB_1 , а внутрь — равносторонний треугольник BCA_1 . Точка M — центр треугольника BCA_1 . Докажите, что треугольник B_1C_1M — равнобедренный с углом 120° .

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABLK$ и $ACMN$ соответственно. Точка D — середина отрезка LM . Найдите углы треугольника BCD .

3. Круг поделили хордой AB на два круговых сегмента и один из них повернули на некоторый угол вокруг точки A . Пусть при этом повороте точка B перешла в точку C . Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BC , перпендикулярны друг другу.

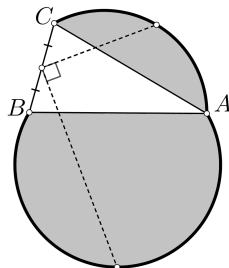


Рис. 1: К задаче 4

4. Точка N лежит на наибольшей стороне AC треугольника ABC . Серединные перпендикуляры к отрезкам AN и NC пересекают стороны AB и BC в точках K и M . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на (KBM) .

5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке A_1 . На биссектрисах углов B и C выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle XA_1Y = 90^\circ$. Докажите, что $\angle XAY = \frac{\angle A}{2}$.

6. На сторонах выпуклого четырёхугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.

7. На сторонах треугольника ABC вне него построены треугольники ABP и ACQ такие, что $AP = AB$, $AC = AQ$ и $\angle BAP = \angle QAC$. Отрезки PC и QB пересекаются в точке R . Точка S — центр (BRC) . Докажите, что $AS \perp PQ$.

8. (Всерос-2021, 11-4) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I . Прямая, проходящая через точку B параллельно AC пересекает лучи AA_1 и CC_1 в

точках A_2 и C_2 соответственно. Точка O_a — центр описанной окружности треугольника AC_1C_2 , точка O_c — центр описанной окружности треугольника CA_1A_2 . Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$.

Гомотетия

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на основаниях AD и BC наружу построены равносходные треугольники ADX и BCY . Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
2. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность ω_1 касается его сторон AB и AD , окружность ω_2 касается его сторон BC и CD . Докажите, что если ω_1 и ω_2 касаются, то их точка касания лежит на диагонали AC .
3. Вписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке D . Пусть DT — диаметр вписанной окружности. Прямая AT пересекает сторону BC в точке X . Докажите, что $BD = CX$.
4. На меньшем основании BC трапеции $ABCD$ нашлась такая точка P , что точка пересечения диагоналей $ABCD$ лежит на биссектрисе угла APD . Докажите, что расстояние от C до AP равно расстоянию от B до DP .
5. Дан треугольник ABC , в котором $AB \neq AC$. Точка E такова, что $AE = BE$ и $BE \perp BC$. Точка F такова, что $AF = CF$ и $CF \perp BC$. Пусть D — точка пересечения касательной к описанной окружности ABC в точке A и прямой BC . Докажите, что точки D, E, F лежат на одной прямой.
6. Три равные окружности ω_1, ω_2 и ω_3 лежат внутри и касаются сторон треугольника ABC : ω_1 сторон AC и AB ; ω_2 сторон AB и BC ; ω_3 сторон AC и BC . Оказалось, что они еще и имеют общую точку S . Докажите, что S лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .
7. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC с центром в точке I касается его гипотенузы BC в точке X . Докажите, что центр окружности, проходящей через X и середины отрезков BI и CI , равноудалён от точек A и I .
8. Противоположные стороны вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках $P = AB \cap CD$ и $Q = AD \cap CB$. Прямая ℓ пересекает прямые AB, CD, CB и AD в точках E, F, G и H соответственно. Докажите, что одна из точек пересечения общих касательных к окружностям, описанным около треугольников PEF и QHG , лежит на прямой PQ .
9. Пусть CE — биссектриса в остроугольном треугольнике ABC . На внешней биссектрисе угла ACB отмечена точка D , а на стороне BC — точка F , причем $\angle BAD = 90^\circ = \angle DEF$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника CEF , лежит на прямой BD .

Добавка

1. Точки P и Q изогонально сопряжены в треугольнике ABC . Пусть S — середина малой дуги BC окружности (ABC) , R — такая точка на окружности (BPC) , что PR и AS параллельны. Докажите, что Q , R и S лежат на одной прямой.
2. Пусть AH_1, BH_2, CH_3 — высоты остроугольного треугольника ABC . Его вписанная окружность касается сторон BC, AC и AB в точках T_1, T_2 и T_3 соответственно. Рассмотрим прямые, симметричные прямым H_1H_2, H_2H_3 и H_3H_1 относительно прямых T_1T_2, T_2T_3 и T_3T_1 . Докажите, что эти прямые образуют треугольник, вершины которого лежат на вписанной окружности ABC .
3. A convex quadrilateral $ABCD$ is circumscribed about a circle ω . Let PQ be the diameter of ω perpendicular to AC . Suppose lines BP and DQ intersect at point X , and lines BQ and DP intersect at point Y . Show that the points X and Y lie on the line AC .
4. Вписанная окружность Ω треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Пусть окружность ω касается отрезков CA и AB в точках Q и R соответственно, а точки M и N выбраны на отрезках AB и AC соответственно так, что отрезки CM и BN касаются ω . Биссектрисы углов NBC и MCB пересекают соответственно отрезки DE и DF в точках K и L . Докажите, что прямые RK и QL пересекаются на ω .

Гомотетия-2

1. Соответствующие стороны неравных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ попарно параллельны. Докажите, что существует гомотетия, которая переводит один треугольник в другой.
2. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C', B', A' соответственно. Точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC, AB описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что прямые A_1A', B_1B', C_1C' пересекаются в одной точке.
3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 , а H — его ортоцентр. Точку H отразили относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 получили точки H_A, H_B, H_C соответственно. Докажите, что AH_A, BH_B, CH_C пересекаются в одной точке.
4. Точки D и E выбраны на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $DE \parallel BC$. Прямая ℓ проходит через A параллельно BC . Точки D_0 и E_0 симметричны D и E относительно ℓ . Докажите, что прямые D_0C, E_0B и ℓ пересекаются в одной точке.
5. Докажите, что прямые, соединяющие центры вневписанных окружностей треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в одной точке.

Вспоминаем движения

1. В окружности ω с центром O проведены диаметры AB и CD . Касательные к ω в точках A и C пересекаются в точке P . Докажите, что касательные к ω в точках B и D пересекаются на прямой OP .
2. Две окружности радиуса R касаются в точке K . На одной из них взята точка A на другой точка B , причем $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что $AB = 2R$.
3. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка P . Пусть H — точка пересечения высот треугольника APD , M — середина AD и N — середина CD . Докажите, что прямые PN и MH перпендикулярны.
4. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ вовне него построен треугольник BSP . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки A на CP , из точки D на BP и из точки P на AD , пересекаются в одной точке.
5. Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. На сторонах BC и CD выбираются точки P и Q такие, что $CP = CQ$. Докажите, что окружности (APQ) проходят через фиксированную точку, отличную от A .
6. Внутри угла с вершиной O отмечена точка M . Постройте на сторонах угла точки X и Y , для которых отрезки OX и OY равны, а сумма $MX + MY$ минимальна.
7. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, отличный от прямоугольника, а точка P выбрана внутри него так, что окружности (PAB) и (PCD) имеют общую хорду, перпендикулярную AD . Докажите, что радиусы данных окружностей равны.

Добавка

1. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причем $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC .
2. В треугольнике ABC проведена высота AD . Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника DHO относительно HO , лежит на средней линии треугольника ABC .
3. Существуют ли на плоскости одновременно не совпадающие точки

$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z,$

для которых четырёхугольники $ABCD, EFGH, IJKL, MNOP, QRST, UVWX, YZAB, CDEF, GHIJ, KLMN, OPQR, STUV$ и $WXYZ$ являются квадратами?

В данной задаче вершины X и Y четырёхугольника $XYZT$ не обязаны быть соседними.

4. **Теорема Монжа.** Докажите, что прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

Композиции движений

Определение. Отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *движением*, если для любых точек плоскости P и Q расстояние между ними равно расстоянию между точками $f(P)$ и $f(Q)$.

Примеры движений из предыдущего листочка.

- R_O^φ — поворот с центром в точке O на угол φ **против** часовой стрелки;
- $T_{\vec{v}}$ — параллельный перенос на вектор $\vec{v}$;
- S_ℓ — осевая симметрия относительно прямой ℓ .

Определение. *Скольльзящая симметрия* — это композиция осевой симметрии относительно прямой ℓ и параллельного переноса на вектор, параллельный ℓ .

1. Пусть f — произвольное движение плоскости. Докажите, что если точки A , B и C лежат на одной прямой, то точки $f(A)$, $f(B)$ и $f(C)$ также лежат на одной прямой.
2. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует ровно одно движение, которое переводит один треугольник в другой (соответственные вершины — в соответственные).
3. Пусть f — движение плоскости. Докажите, что **(а)** если у f есть ровно 1 неподвижная точка, то это поворот с центром в этой точке; **(б)** если множество неподвижных точек f является прямой, то это осевая симметрия относительно этой прямой.
4. Чем является композиция $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$, если прямые ℓ_1 и ℓ_2 **(а)** пересекаются; **(б)** параллельны?
5. Чем является композиция поворота и **(а)** параллельного переноса; **(б)** симметрии?
6. **(а)** Докажите, что любое движение можно представить как композицию не более чем трёх симметрий.
(б) Теорема Шаля. Докажите, что любое движение плоскости — это либо поворот, либо параллельный перенос, либо симметрия, либо скольльзящая симметрия.
7. **(а)** Докажите, что для произвольного движения f существует такое движение g , что композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ являются тождественными на всей плоскости, то есть оставляют все точки плоскости на месте;
(б) Опишите все движения f , для которых $f \circ f = f$;
(в) Опишите все движения f , для которых $f \circ f \circ f = f$.

Добавка

1. В неравностороннем треугольнике ABC провели биссектрису внутреннего угла AA_1 и биссектрису внешнего угла AA_2 . Из точек A_1 и A_2 провели касательные к окружности ω , вписанной в треугольник ABC , отличные от прямой BC . Они касаются ω в точках D_1 и D_2 . Докажите, что точки A , D_1 и D_2 лежат на одной прямой.
2. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что середины отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 или лежат на одной прямой, или образуют треугольник, подобный ABC .
3. Дан треугольник ABC . Произвольная точка плоскости P последовательно отражается относительно прямых AB , AC и BC . Результат этого преобразования обозначим через $f(P)$. Найдите множество точек P таких, что расстояние между P и $f(P)$ минимально.

Композиции поворотов

Факт. Пусть A и B — две различные точки плоскости. Тогда

$$R_B^\beta \circ R_A^\alpha = \begin{cases} R_C^{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{360}, \\ T_{\vec{v}}, & \text{если } \alpha + \beta \equiv 0 \pmod{360}, \end{cases}$$

для некоторой точки C и некоторого вектора $\vec{v}$.

Теорема Наполеона. На сторонах треугольника вовне построены правильные треугольники. Тогда их центры образуют правильный треугольник.

1. На сторонах треугольника ABC вовне построены равносторонние треугольники ABC_1 и ACB_1 , а внутрь — равносторонний треугольник B_1CA_1 . Точка M — центр треугольника B_1CA_1 . Докажите, что треугольник B_1C_1M — равнобедренный с углом 120° .
2. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABLK$ и $ACMN$ соответственно. Точка D — середина отрезка LM . Найдите углы треугольника BCD .
3. Круг поделили хордой AB на два круговых сегмента и один из них повернули на некоторый угол вокруг точки A . Пусть при этом повороте точка B перешла в точку C . Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BC , перпендикулярны друг другу.
4. Точка N лежит на наибольшей стороне AC треугольника ABC . Серединные перпендикуляры к отрезкам AN и NC пересекают стороны AB и BC в точках K и M . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на (KBM) .
5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке A_1 . На биссектрисах углов B и C выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle XA_1Y = 90^\circ$. Докажите, что $\angle XAY = \frac{\angle A}{2}$.
6. На сторонах выпуклого четырёхугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.
7. На сторонах треугольника ABC вне него построены треугольники ABP и ACQ такие, что $AP = AB$, $AC = AQ$ и $\angle BAP = \angle QAC$. Отрезки PC и QB пересекаются в точке R . Точка S — центр (BRC) . Докажите, что $AS \perp PQ$.
8. (Всерос-2021, 11-4) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I . Прямая, проходящая через точку B параллельно AC пересекает лучи AA_1 и CC_1 в

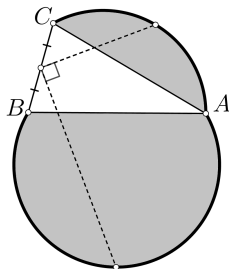


Рис. 2: К задаче 4

точках A_2 и C_2 соответственно. Точка O_a — центр описанной окружности треугольника AC_1C_2 , точка O_c — центр описанной окружности треугольника CA_1A_2 . Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$.

Гомотетия

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на основаниях AD и BC наружу построены равносходные треугольники ADX и BCY . Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
2. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность ω_1 касается его сторон AB и AD , окружность ω_2 касается его сторон BC и CD . Докажите, что если ω_1 и ω_2 касаются, то их точка касания лежит на диагонали AC .
3. Вписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке D . Пусть DT — диаметр вписанной окружности. Прямая AT пересекает сторону BC в точке X . Докажите, что $BD = CX$.
4. На меньшем основании BC трапеции $ABCD$ нашлась такая точка P , что точка пересечения диагоналей $ABCD$ лежит на биссектрисе угла APD . Докажите, что расстояние от C до AP равно расстоянию от B до DP .
5. Дан треугольник ABC , в котором $AB \neq AC$. Точка E такова, что $AE = BE$ и $BE \perp BC$. Точка F такова, что $AF = CF$ и $CF \perp BC$. Пусть D — точка пересечения касательной к описанной окружности ABC в точке A и прямой BC . Докажите, что точки D, E, F лежат на одной прямой.
6. Три равные окружности ω_1, ω_2 и ω_3 лежат внутри и касаются сторон треугольника ABC : ω_1 сторон AC и AB ; ω_2 сторон AB и BC ; ω_3 сторон AC и BC . Оказалось, что они еще и имеют общую точку S . Докажите, что S лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .
7. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC с центром в точке I касается его гипотенузы BC в точке X . Докажите, что центр окружности, проходящей через X и середины отрезков BI и CI , равноудалён от точек A и I .
8. Пусть CE — биссектриса в остроугольном треугольнике ABC . На внешней биссектрисе угла ACB отмечена точка D , а на стороне BC — точка F , причем $\angle BAD = 90^\circ = \angle DEF$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника CEF , лежит на прямой BD .

Гомотетия-2

1. Соответствующие стороны неравных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ попарно параллельны. Докажите, что существует гомотетия, которая переводит один треугольник в другой.
2. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C', B', A' соответственно. Точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC, AB описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что прямые A_1A', B_1B', C_1C' пересекаются в одной точке.
3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 , а H — его ортоцентр. Точку H отразили относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 и получили точки H_A, H_B, H_C соответственно. Докажите, что AH_A, BH_B, CH_C пересекаются в одной точке.
4. Точки D и E выбраны на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $DE \parallel BC$. Прямая ℓ проходит через A параллельно BC . Точки D_0 и E_0 симметричны D и E относительно ℓ . Докажите, что прямые D_0C, E_0B и ℓ пересекаются в одной точке.
5. Проведём через основание биссектрисы угла A неравнобедренного треугольника ABC отличную от стороны BC касательную к вписанной в треугольник окружности. Точку её касания с окружностью обозначим через K_A . Аналогично построим точки K_B и K_C . Докажите, что три прямые, соединяющие точки K_A, K_B и K_C с серединами сторон BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

Движения плоскости

Основные примеры движений.

- R_O^φ — поворот с центром в точке O на угол φ **против** часовой стрелки;
 - $T_{\vec{v}}$ — параллельный перенос на вектор $\vec{v}$;
 - S_ℓ — осевая симметрия относительно прямой ℓ .
 - $R_O^{180^\circ}$ — центральная симметрия с центром в точке O .
1. Докажите, что движения R_O^φ , $T_{\vec{v}}$, S_ℓ переводят прямые в прямые.
 2. Пусть при повороте на угол α прямая ℓ перешла в прямую ℓ' . Докажите, что угол между ℓ и ℓ' равен α .

Ключевая мысль. Знание основных примеров движений и их свойств часто подсказывает полезные дополнительные построения и помогает понять, как устроена картинка на самом деле.

3. В окружности ω с центром O проведены диаметры AB и CD . Касательные к ω в точках A и C пересекаются в точке P . Докажите, что касательные к ω в точках B и D пересекаются на прямой OP .
4. Две окружности радиуса R касаются в точке K . На одной из них взята точка A на другой точка B , причем $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что $AB = 2R$.
5. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка P . Пусть H — точка пересечения высот треугольника APD , M — середина AD и N — середина CD . Докажите, что прямые PN и MH перпендикулярны.
6. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ вне него построен треугольник BSP . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки A на CP , из точки D на BP и из точки P на AD , пересекаются в одной точке.
7. Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. На сторонах BC и CD выбираются точки P и Q такие, что $CP = CQ$. Докажите, что окружности (APQ) проходят через фиксированную точку, отличную от A .
8. Внутри угла с вершиной O отмечена точка M . Постройте на сторонах угла точки X и Y , для которых отрезки OX и OY равны, а сумма $MX + MY$ минимальна.

Добавка

1. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, отличный от прямоугольника, а точка P выбрана внутри него так, что окружности (PAB) и (PCD) имеют общую хорду, перпендикулярную AD . Докажите, что радиусы данных окружностей равны.
2. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причем $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC .
3. **Теорема Монжа.** Докажите, что прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.
4. В треугольнике ABC проведена высота AD . Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника DHO относительно HO , лежит на средней линии треугольника ABC .

Композиции движений

Определение. Отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *движением*, если для любых точек плоскости P и Q расстояние между ними равно расстоянию между точками $f(P)$ и $f(Q)$.

Определение. Пусть f и g — движения плоскости. Через $f \circ g$ обозначим их *композицию*, а именно преобразование, которое получается при последовательном применении этих движений: сначала g , а потом f .

Определение. *Скольльзящая симметрия* — это композиция осевой симметрии относительно прямой ℓ и параллельного переноса на вектор, параллельный ℓ .

1. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что **(а)** существует **(б)** единственное движение, которое переводит один треугольник в другой (соответственные вершины — в соответственные).
2. Пусть f — движение плоскости. Докажите, что **(а)** если у f есть ровно 1 неподвижная точка, то это поворот с центром в этой точке; **(б)** если множество неподвижных точек f является прямой, то это осевая симметрия относительно этой прямой.
3. **(а)** Докажите, что если прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются под углом φ , то композиция $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2}$ является поворотом на угол 2φ относительно точки пересечения прямых; **(б)** Чем является композиция $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$, если прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны? **(в)** А $S_{\ell_1} \circ S_{\ell_2}$?
4. Докажите, что **(а)** композиция поворота и параллельного переноса является поворотом; **(б)** композиция поворота и симметрии является скольльзящей симметрией.
5. **(а)** Докажите, что любое движение можно представить как композицию не более чем трёх симметрий.
(б) Теорема Шаля. Докажите, что любое движение плоскости — это либо поворот, либо параллельный перенос, либо симметрия, либо скольльзящая симметрия.
6. **(а)** Докажите, что для произвольного движения f существует такое движение g , что композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ являются тождественными на всей плоскости, то есть оставляют все точки плоскости на месте;
(б) Опишите все движения f , для которых $f \circ f = f$;
(в) Опишите все движения f , для которых $f \circ f \circ f = f$.

Добавка

1. В неравностороннем треугольнике ABC провели биссектрису внутреннего угла AA_1 и биссектрису внешнего угла AA_2 . Из точек A_1 и A_2 провели касательные к окружности ω , вписанной в треугольник ABC , отличные от прямой BC . Они касаются ω в точках D_1 и D_2 . Докажите, что точки A , D_1 и D_2 лежат на одной прямой.
2. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что середины отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 или лежат на одной прямой, или образуют треугольник, подобный ABC .
3. Дан треугольник ABC . Произвольная точка плоскости P последовательно отражается относительно прямых AB , AC и BC . Результат этого преобразования обозначим через $f(P)$. Найдите множество точек P таких, что расстояние между P и $f(P)$ минимально.

Композиции поворотов

Теорема. Пусть A и B — две различные точки плоскости. Тогда

$$R_B^\beta \circ R_A^\alpha = \begin{cases} R_C^{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha + \beta \not\equiv 0 \pmod{360}, \\ T_{\vec{v}}, & \text{если } \alpha + \beta \equiv 0 \pmod{360}, \end{cases}$$

для некоторой точки C и некоторого вектора $\vec{v}$.

Следствие. Предположим, что $R_C^\gamma \circ R_B^\beta \circ R_A^\alpha = \text{id}$ — тождественное преобразование плоскости, причём $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$. Тогда $\angle A = \frac{\alpha}{2}$, $\angle B = \frac{\beta}{2}$, $\angle C = \frac{\gamma}{2}$.

Теорема Наполеона. На сторонах треугольника вовне построены правильные треугольники. Тогда их центры образуют правильный треугольник.

1. С центрами в точках A и B сделали повороты на некоторые углы. Определите, какими должны быть композиции, чтобы центры полученных поворотов совпадали с точками C, D, E, F (см. рисунок).

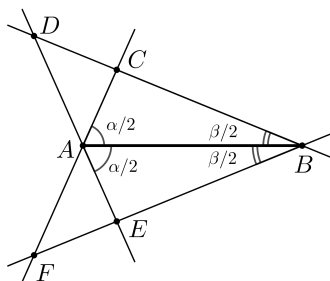


Рис. 3: К задаче 1

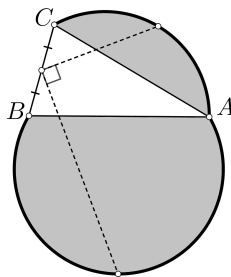


Рис. 4: К задаче 4

2. На сторонах треугольника ABC вовне построены равносторонние треугольники ABC_1 и ACB_1 , а внутри — равносторонний треугольник BCA_1 . Точка M — центр треугольника BCA_1 . Докажите, что треугольник B_1C_1M — равнобедренный с углом 120° .
3. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABLK$ и $ACMN$ соответственно. Точка D — середина отрезка LM . Найдите углы треугольника BCD .
4. Круг поделили хордой AB на два круговых сегмента и один из них повернули на некоторый угол вокруг точки A . Пусть при этом повороте точка B перешла в точку C . Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BC , перпендикулярны друг другу.
5. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке A_1 . На биссектрисах углов B и C выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle XA_1Y = 90^\circ$. Докажите, что $\angle XAY = \frac{\angle A}{2}$.

Добавка

1. На сторонах выпуклого четырёхугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.
2. На сторонах треугольника ABC вне него построены треугольники ABP и ACQ такие, что $AP = AB$, $AC = AQ$ и $\angle BAP = \angle QAC$. Отрезки PC и QB пересекаются в точке R . Точка S — центр (BRC) . Докажите, что $AS \perp PQ$.
3. (Всерос-2021, 11-4) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I . Прямая, проходящая через точку B параллельно AC пересекает лучи AA_1 и CC_1 в точках A_2 и C_2 соответственно. Точка O_a — центр описанной окружности треугольника AC_1C_2 , точка O_c — центр описанной окружности треугольника CA_1A_2 . Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$.

Гомотетия

1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на основаниях AD и BC наружу построены равносходные треугольники ADX и BCY . Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
2. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность ω_1 касается его сторон AB и AD , окружность ω_2 касается его сторон BC и CD . Докажите, что если ω_1 и ω_2 касаются, то их точка касания лежит на диагонали AC .
3. Вписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке D . Пусть DT — диаметр вписанной окружности. Прямая AT пересекает сторону BC в точке X . Докажите, что $BD = CX$.
4. На меньшем основании BC трапеции $ABCD$ нашлась такая точка P , что точка пересечения диагоналей $ABCD$ лежит на биссектрисе угла APD . Докажите, что расстояние от C до AP равно расстоянию от B до DP .
5. Дан треугольник ABC , в котором $AB \neq AC$. Точка E такова, что $AE = BE$ и $BE \perp BC$. Точка F такова, что $AF = CF$ и $CF \perp BC$. Пусть D — точка пересечения касательной к описанной окружности ABC в точке A и прямой BC . Докажите, что точки D, E, F лежат на одной прямой.
6. Три равные окружности ω_1, ω_2 и ω_3 лежат внутри и касаются сторон треугольника ABC : ω_1 сторон AC и AB ; ω_2 сторон AB и BC ; ω_3 сторон AC и BC . Оказалось, что они еще и имеют общую точку S . Докажите, что S лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .
7. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC с центром в точке I касается его гипотенузы BC в точке X . Докажите, что центр окружности, проходящей через X и середины отрезков BI и CI , равноудалён от точек A и I .
8. Пусть CE — биссектриса в остроугольном треугольнике ABC . На внешней биссектрисе угла ACB отмечена точка D , а на стороне BC — точка F , причем $\angle BAD = 90^\circ = \angle DEF$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника CEF , лежит на прямой BD .

Добавка

1. На прямоугольный противень помещается 100 круглых печений. Обязательно ли на такой же противень можно уложить 400 круглых печений в два раза меньшего радиуса?
2. Пусть CE — биссектриса в остроугольном треугольнике ABC . На внешней биссектрисе угла ACB отмечена точка D , а на стороне BC — точка F , причем $\angle BAD = 90^\circ = \angle DEF$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника CEF , лежит на прямой BD .
3. Противоположные стороны вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках $P = AB \cap CD$ и $Q = AD \cap CB$. Прямая ℓ пересекает прямые AB , CD , CB и AD в точках E , F , G и H соответственно. Докажите, что одна из точек пересечения общих касательных к окружностям, описанным около треугольников PEF и QHG , лежит на прямой PQ .

Гомотетия-2

1. Соответствующие стороны неравных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ попарно параллельны. Докажите, что существует гомотетия, которая переводит один треугольник в другой.
2. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C', B', A' соответственно. Точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, AC, AB описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что прямые A_1A', B_1B', C_1C' пересекаются в одной точке.
3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 , а H — его ортоцентр. Точку H отразили относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 и получили точки H_A, H_B, H_C соответственно. Докажите, что AH_A, BH_B, CH_C пересекаются в одной точке.
4. Точки D и E выбраны на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $DE \parallel BC$. Прямая ℓ проходит через A параллельно BC . Точки D_0 и E_0 симметричны D и E относительно ℓ . Докажите, что прямые D_0C, E_0B и ℓ пересекаются в одной точке.
5. Проведём через основание биссектрисы угла A неравнобедренного треугольника ABC отличную от стороны BC касательную к вписанной в треугольник окружности. Точку её касания с окружностью обозначим через K_A . Аналогично построим точки K_B и K_C . Докажите, что три прямые, соединяющие точки K_A, K_B и K_C с серединами сторон BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

Часть III

Комбинаторика

Лемма Холла

Лемма Холла. Дан двудольный граф. Пусть известно, что для любых k вершин первой доли количество вершин второй доли, которые смежны хотя бы с одной из выбранных k вершин, хотя бы k . Тогда существует паросочетание, содержащее все вершины первой доли.

Альтернативная формулировка. Каждому юноше нравится несколько девушек. Известно, что для любых k юношей количество девушек, которые нравятся хотя бы одному из выбранных юношей, не меньше k . Тогда можно каждому юноше выбрать по невесте так, чтобы всем юношам нравились их невесты.

В первых двух задачах предлагается доказать лемму Холла двумя разными способами. Оба способа будут доказывать лемму Холла по индукции по числу юношей.

- (а) Возьмём произвольного юношу и женим его на знакомой с ним девушке и забудем про них. Опишите явно, в каком случае предположение индукции неприменимо к оставшемуся графу.

(б) Ответ к пункту а — наличие некоторого множества юношей специального вида. Попробуйте применить предположение индукции к этому множеству. Опишите явно, когда это невозможно.

(в) Завершите доказательство леммы Холла.
- Чтобы воспользоваться индукцией, достаточно применить предположение индукции ко всем юношам, кроме какого-то одного. Предположение индукции выдало нам некоторое паросочетание. Остался один юноша. Рассмотрим следующий процесс: образуем тайное общество, в которое изначально входит только неженатый юноша. Добавим в тайное общество всех его знакомых девушек и всех их мужей, если они есть. Затем снова добавим всех девушек, знакомых хотя бы с одним юношей из тайного общества, и всех мужей этих девушек, и так далее.

(а) Докажите, если в какой-то момент незамужняя девушка попала в тайное общество, то тайное общество можно переженить так, чтобы у каждого юноши была невеста.

(б) Докажите, что одна из незамужних девушек действительно когда-нибудь попадет в тайное общество. Завершите доказательство.
- На чаепитие собрались N школьников, каждый принес по K пирожных. Все пирожные разложили на N тарелок по K на тарелку. Докажите, что как бы ни были разложены пирожные, можно так раздать тарелки, что каждому достанется хотя бы одно пирожное, которое он сам принес.
- В клетках таблицы $n \times (n + d)$ (n строк, $n + d$ столбцов) расставлены фишки. Известно, что если в таблице оставить любые k столбцов, то останется не менее $k - d$ непустых строк. Докажите, что можно выбрать n фишек, стоящих в разных столбцах и строках.
- Пусть d — натуральное число. Дано несколько множеств. Известно, что объедине-

ние любых k множеств содержит хотя бы kd элементов. Докажите, из каждого множества можно выбрать по d элементов так, чтобы все выбранные элементы были различны.

6. В магазине продаются комплекты котлеток и пюreshек разных видов, в каждом комплекте по одной котлетке и одной пюreshке. Известно, что каждый вид котлеты входит ровно в 100 комплектов и каждый вид пюре входит в 100 комплектов. Купить все комплекты (каждый в единственном экземпляре) стоит 100 тугриков. Миша хочет купить несколько комплектов так, что каждый вид пюре входит ровно в один комплект и каждый вид котлет входит ровно в один комплект. Докажите, что он может сделать это, заплатив не более 1 тугрика.

Лемма Кёнига

Определение. Множество вершин графа называется *вершинным покрытием*, если хотя бы один конец любого ребра лежит в этом множестве.

1. **(Лемма Кёнига)** В любом двудольном графе число рёбер в максимальном паросочетании равно числу вершин в минимальном вершинном покрытии.
2. Дан двудольный граф G . Король снова решил устроить испытание мудрецам. Он расположил мудрецов в вершинах графа так, что каждый мудрец видит только мудрецов, сидящих в смежных вершинах. У короля есть неограниченный запас колпаков двух цветов. На каждого мудреца надевают колпак, и по команде каждый мудрец пишет предположение, какой колпак на нем надет. Обозначим через $m(G)$ размер максимального паросочетания в графе G .
 - (а) Докажите, что мудрецы могут договориться так, чтобы гарантированно хотя бы $m(G)$ предположений оказывалось верными.
 - (б) Докажите, что мудрецы не могут договориться так, чтобы гарантированно более $m(G)$ предположений оказывалось верными.

Лемма Холла. Практика

1. Квадрат двумя различными способами разбит на N кусков одинаковой площади. Докажите, что в нем можно выбрать N точек так, чтобы в каждом куске каждого разбиения было ровно по одной выбранной точке.
2. Десять школьников решали десять задач. Известно, что каждый школьник решил хотя бы k задач, и каждую задачу решило хотя бы k школьников. Для какого наименьшего k можно гарантированно провести разбор так, чтобы каждый школьник рассказал по одной задаче, которую решил?
3. (а) Петя выписал все 1000-элементные подмножества 2025-элементного множества. Докажите, что Вася может приписать по элементу в каждое подмножество так, чтобы образовавшиеся 1001-элементные подмножества были попарно различными
(б) Какое наибольшее количество подмножеств 2025-элементного множества можно выбрать так, чтобы никакое выбранное множество не являлось подмножеством другого выбранного множества?
4. Дано натуральное n и ориентированный граф, в котором исходящие степени всех вершин равны n , и входящие степени всех вершин равны n . Докажите, что в данном графе можно выбрать несколько простых ориентированных циклов так, чтобы каждая вершина содержалась ровно в одном из них.
5. Клетки шахматной доски 8×8 занумерованы числами от 1 до 16 так, что каждое число встречается четырежды. Докажите, что можно выбрать 16 клеток, занумерованные разными числами, так что на каждой вертикали и каждой горизонтали найдется хотя бы по одной выбранной клетке.
6. Даны n мальчиков и $2n - 1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).
7. В турнире по волейболу участвует 16 команд. Они играют однокруговой турнир: каждый тур команды разбиваются на 8 пар и играют между собой. Ничьих в волейболе не бывает. Докажите, что в каждом туре можно выбрать матч так, чтобы победители этих матчей были попарно различными.
8. В некоторой стране каждый город соединен авиарейсами с не менее чем 40 и не более, чем 70 другими. Докажите, что можно отменить несколько рейсов так, чтобы каждый город был соединен с не менее, чем 20, и не более, чем 50 другими.

Лемма Холла. Практика. Добавка

1. Пусть G — граф, в котором v вершин. Известно, что для любого множества A количество вершин, соседних хотя бы с одной из вершин A , не меньше количества вершин в A . Докажите, что в графе G найдется паросочетание, в котором не меньше $\frac{v}{3}$ ребер.
2. У каждой из 100 девочек есть по 100 шариков; среди этих 10000 шариков есть по 100 шариков 100 различных цветов. Две девочки могут обмениваться, передав друг другу по шарiku. Они хотят добиться того, чтобы у каждой девочки было по 100 разноцветных шариков. Докажите, что они могут добиться этого такой серией обменов, чтобы любой шарик участвовал не более чем в одном обмене.

Алгебраические конструкции в комбинаторике

1. В меню столовой есть n салатов, n супов и n вторых блюд. Обед состоит из салата, супа и второго блюда. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая пара блюд не повторилась?
2. В условиях предыдущей задачи в обновлённом меню появились ещё n десертов, и теперь обед включает в себя ещё и десерт. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая тройка блюд не повторилась?
3. Алфавит состоит из k букв, словом считается любая последовательность из n букв алфавита. Два слова *похожи*, если они различаются ровно в одной букве. В какое минимальное число цветов можно раскрасить все слова, так чтобы любые два похожих слова были разного цвета?
4. Дано нечётное натуральное число n . Предположим, что в греческом алфавите n букв и в латинском алфавите тоже n букв. Докажите, что в каждую клетку квадрата $n \times n$ можно поставить две буквы — одну греческую и одну латинскую — так, чтобы в каждом ряду ни греческие, ни латинские буквы не повторялись и чтобы ни в каких двух клетках не была написана одна и та же пара букв.
5. Компания из 2^k друзей ($k \geq 2$) — завсегдатаи клуба интеллектуальных игр. На каждую игру они выставляют команду из четырёх человек. Какое минимальное число игр потребуется друзьям для того, чтобы любые трое из них хотя бы раз оказались в одной команде?
6. В соревнованиях «Слесарь Года» участвуют 81 слесарей. У каждого слесаря есть свой *разряд* — натуральное число, известное только ему. Разряды всех слесарей различны. В одном раунде участвуют три слесаря, и по итогам раунда выявляется победитель — обладатель высшего разряда. Расписание составляется заранее и по ходу соревнований не меняется. Какое наименьшее число раундов необходимо для выявления сильнейшего слесаря?
7. Квадрат разбивают на 4 равных квадрата. Затем один из получившихся квадратов тоже разбивают на 4 равных квадрата, один из (семи) имеющихся после этого квадратов разбивают на 4 равных квадрата и так далее. После конечного числа таких операций квадрат оказывается разбит на меньшие квадраты. Назовём два квадрата разбиения *соседними*, если сторона одного из них содержит сторону другого (возможно, совпадает с ней). Известно, что в получившемся разбиении стороны любых двух соседних квадратов отличаются в один или в два раза. В какое наименьшее количество цветов заведомо можно раскрасить все квадраты разбиения так, чтобы любые два соседних квадрата были разного цвета?
8. Докажите, в клетчатом квадрате 997×997 можно отметить 997 клеток так, чтобы центры никаких трёх отмеченных клеток не лежали на одной прямой.

Кооперативные стратегии

1. Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причём одну из карт кладёт рубашкой вверх, а остальные – картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
2. Каждому из n мудрецов надевают колпак одного из n цветов. Каждый мудрец видит колпаки всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своего колпака, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал, если **(а)** $n = 2$; **(б)** $n = 3$; **(в)** n — любое.
3. **(а)** Зритель пишет на доске слева направо 10 цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр карточкой. После этого входит фокусник и называет закрытую цифру. Докажите, что такой фокус действительно возможен. **(б)** Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из 101 цифры. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). Докажите, что такой фокус действительно возможен.
4. В сундуке 5 колпаков различных цветов. Из сундука вытащили три колпака и вслепую надели троим мудрецам. Мудрецы видят колпаки друг друга, но не видят свой и одновременно пытаются его угадать. Могут ли мудрецы договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы один из них угадывал?
5. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше – съем на обед». **(а)** Смогут ли гномы заранее договориться действовать так, чтобы спастись? **(б)** А если нужно угадать хотя бы четверым?
6. 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным – другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого – 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?
7. У каждого из n мудрецов стоит сундук, в котором лежат шляпы одного из a_n цветов. Одновременно каждому мудрецу надевают шляпу из его сундука. Каждый мудрец

видит шляпы всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. **(а)** Докажите, что если $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 1$, то мудрецы не могут договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них гарантированно угадал. **(б)** Докажите, что если $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq 1$, то мудрецы могут договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них гарантированно угадал.

Кооперативные стратегии. Добавка

1. Алиса и Боб играют против казино в такую игру:

Сначала Алиса ставит на 0 или 1. Потом Боб ставит на 0 или 1. Потом казино ставит на 0 или 1. Известно, что казино заранее составляет список своих ставок и не меняет его по ходу игры.

Если все три ставки одинаковы, то Алиса и Боб получают доллар, иначе — казино получает доллар. Алиса и Боб могут договориться о стратегии заранее, но не смогут общаться после начала игры. Боб перед началом игры (но после общения с Алисой) узнаёт список ставок казино.

Докажите, что Алиса и Боб могут договориться действовать так, что они гарантированно победят казино (то есть заработают строго больше денег, чем казино).

Now comes the interesting twist: Just before the beginning of the game, Bob steals the secret casino sequence from the casino's safe. He knows he is going to get the secret Casino bets, but once he touches it - he can not talk to Alice anymore.

Кооперативные стратегии-2

1. Король пишет двум мудрецам на лоб по целому числу так, что каждый видит только число другого. После этого их сажают в разные комнаты, дают листочек бумаги и ручку и говорят: пишите конечный набор чисел. Если хотя бы один мудрец напишет своё число, то оба спаслись, в противном случае их казнят. Могут ли мудрецы договориться, чтобы гарантированно справиться с заданием?
2. Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает семь различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?
3. Кашей заточил в темницу толпу пленников и сказал им: «Завтра вам предстоит испытание. Я выберу нескольких из вас (кого захочу, но минимум троих), посажу за круглый стол в каком-то порядке (в каком пожелаю) и каждому на лоб наклею бумажку с нарисованной на ней фигуркой. Фигурки могут повторяться, но никакие две разные фигурки не будут наклеены на одинаковое число людей. Каждый посмотрит на фигурки остальных, а своей не увидит. Подавать друг другу какие-то знаки запрещено. После этого я наклейки сниму и велю всех развести по отдельным камерам. Там каждый должен будет на листе бумаги нарисовать фигурку. Если хоть один нарисует такую, какая была у него на лбу, всех отпущу. Иначе останетесь здесь навечно».

Как пленникам договориться действовать, чтобы спастись?

4. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полукруглость, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?

Лемма Холла

Лемма Холла. Дан двудольный граф. Пусть известно, что для любых k вершин первой доли количество вершин второй доли, которые смежны хотя бы с одной из выбранных k вершин, хотя бы k . Тогда существует паросочетание, содержащее все вершины первой доли.

Альтернативная формулировка. Каждому юноше нравится несколько девушек. Известно, что для любых k юношей количество девушек, которые нравятся хотя бы одному из выбранных юношей, не меньше k . Тогда можно каждому юноше выбрать по невесте так, чтобы всем юношам нравились их невесты.

В первых двух задачах предлагается доказать лемму Холла двумя разными способами. Оба способа будут доказывать лемму Холла по индукции по числу юношей.

- (а) Возьмём произвольного юношу и женим его на знакомой с ним девушке и забудем про них. Опишите явно, в каком случае предположение индукции неприменимо к оставшемуся графу.

(б) Ответ к пункту а — наличие некоторого множества юношей специального вида. Попробуйте применить предположение индукции к этому множеству. Опишите явно, когда это невозможно.

(в) Завершите доказательство леммы Холла.
- Чтобы воспользоваться индукцией, достаточно применить предположение индукции ко всем юношам, кроме какого-то одного. Предположение индукции выдало нам некоторое паросочетание. Остался один юноша. Рассмотрим следующий процесс: образуем тайное общество, в которое изначально входит только неженатый юноша. Добавим в тайное общество всех его знакомых девушек и всех их мужей, если они есть. Затем снова добавим всех девушек, знакомых хотя бы с одним юношей из тайного общества, и всех мужей этих девушек, и так далее.

(а) Докажите, если в какой-то момент незамужняя девушка попала в тайное общество, то тайное общество можно переженить так, чтобы у каждого юноши была невеста.

(б) Докажите, что одна из незамужних девушек действительно когда-нибудь попадет в тайное общество. Завершите доказательство.
- На чаепитие собрались N школьников, каждый принес по K пирожных. Все пирожные разложили на N тарелок по K на тарелку. Докажите, что как бы ни были разложены пирожные, можно так раздать тарелки, что каждому достанется хотя бы одно пирожное, которое он сам принес.
- В клетках таблицы $n \times (n + d)$ (n строк, $n + d$ столбцов) расставлены фишки. Известно, что если в таблице оставить любые k столбцов, то останется не менее $k - d$ непустых строк. Докажите, что можно выбрать n фишек, стоящих в разных столбцах и строках.
- Пусть d — натуральное число. Дано несколько множеств. Известно, что объедине-

ние любых k множеств содержит хотя бы kd элементов. Докажите, из каждого множества можно выбрать по d элементов так, чтобы все выбранные элементы были различны.

6. В магазине продаются комплекты котлеток и пюрешек разных видов, в каждом комплекте по одной котлетке и одной пюрешке. Известно, что каждый вид котлеты входит ровно в 100 комплектов и каждый вид пюре входит в 100 комплектов. Купить все комплекты (каждый в единственном экземпляре) стоит 100 тугриков. Миша хочет купить несколько комплектов так, что каждый вид пюре входит ровно в один комплект и каждый вид котлет входит ровно в один комплект. Докажите, что он может сделать это, заплатив не более 1 тугрика.

Лемма Холла. Практика

1. Квадрат двумя различными способами разбит на N кусков одинаковой площади. Докажите, что в нем можно выбрать N точек так, чтобы в каждом куске каждого разбиения было ровно по одной выбранной точке.
2. Десять школьников решали десять задач. Известно, что каждый школьник решил хотя бы k задач, и каждую задачу решило хотя бы k школьников. Для какого наименьшего k можно гарантированно провести разбор так, чтобы каждый школьник рассказал по одной задаче, которую решил?
3. (а) Петя выписал все 1000-элементные подмножества 2025-элементного множества. Докажите, что Вася может приписать по элементу в каждое подмножество так, чтобы образовавшиеся 1001-элементные подмножества были попарно различными
(б) Какое наибольшее количество подмножеств 2025-элементного множества можно выбрать так, чтобы никакое выбранное множество не являлось подмножеством другого выбранного множества?
4. Дано натуральное n и ориентированный граф, в котором исходящие степени всех вершин равны n , и входящие степени всех вершин равны n . Докажите, что в данном графе можно выбрать несколько простых ориентированных циклов так, чтобы каждая вершина содержалась ровно в одном из них.
5. Клетки шахматной доски 8×8 занумерованы числами от 1 до 16 так, что каждое число встречается четырежды. Докажите, что можно выбрать 16 клеток, занумерованные разными числами, так что на каждой вертикали и каждой горизонтали найдется хотя бы по одной выбранной клетке.
6. Даны n мальчиков и $2n - 1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).
7. В турнире по волейболу участвует 16 команд. Они играют однокруговой турнир: каждый тур команды разбиваются на 8 пар и играют между собой. Ничьих в волейболе не бывает. Докажите, что в каждом туре можно выбрать матч так, чтобы победители этих матчей были попарно различными.
8. В некоторой стране каждый город соединен авиарейсами с не менее чем 40 и не более, чем 70 другими. Докажите, что можно отменить несколько рейсов так, чтобы каждый город был соединен с не менее, чем 20, и не более, чем 50 другими.

Лемма Холла. Практика. Добавка

1. В турнире по волейболу участвует 16 команд. Они играют однокруговой турнир: каждый тур команды разбиваются на 8 пар и играют между собой. Ничьих в волейболе не бывает. Докажите, что в каждом туре можно выбрать матч так, чтобы победители этих матчей были попарно различными.
2. В некоторой стране каждый город соединен авиарейсами с не менее чем 40 и не более, чем 70 другими. Докажите, что можно отменить несколько рейсов так, чтобы каждый город был соединен с не менее, чем 20, и не более, чем 50 другими.

Алгебраические конструкции в комбинаторике

1. Куб $8 \times 8 \times 8$ разбит на единичные кубики. Какое наибольшее количество ладей можно поставить в некоторые кубики так, чтобы не было двух ладей, находящихся в одном ряду?
2. В меню столовой есть n салатов, n супов и n вторых блюд. Обед состоит из салата, супа и второго блюда. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая пара блюд не повторилась?
3. В условиях предыдущей задачи в обновлённом меню появились ещё n десертов, и теперь обед включает в себя ещё и десерт. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая тройка блюд не повторилась?
4. Алфавит состоит из k букв, словом считается любая последовательность из n букв алфавита. Два слова *похожи*, если они различаются ровно в одной букве. В какое минимальное число цветов можно раскрасить все слова, так чтобы любые два похожих слова были разного цвета?
5. Дано нечётное натуральное число n . Предположим, что в греческом алфавите n букв и в латинском алфавите тоже n букв. Докажите, что в каждую клетку квадрата $n \times n$ можно поставить две буквы — одну греческую и одну латинскую — так, чтобы в каждом ряду ни греческие, ни латинские буквы не повторялись и чтобы ни в каких двух клетках не была написана одна и та же пара букв.
6. Компания из **(а)** 8; **(б)** 2^k друзей ($k \geq 2$) — завсегдатаи клуба интеллектуальных игр. На каждую игру они выставляют команду из четырёх человек. Какое минимальное число игр потребуется друзьям для того, чтобы любые трое из них хотя бы раз оказались в одной команде?
7. В соревнованиях «Слесарь Года» участвуют 81 слесарей. У каждого слесаря есть свой *разряд* — натуральное число, известное только ему. Разряды всех слесарей различны. В одном раунде участвуют три слесаря, и по итогам раунда выявляется победитель — обладатель высшего разряда. Расписание составляется заранее и по ходу соревнований не меняется. Какое наименьшее число раундов необходимо для выявления сильнейшего слесаря?
8. Квадрат разбивают на 4 равных квадрата. Затем один из получившихся квадратов тоже разбивают на 4 равных квадрата, один из (семи) имеющихся после этого квадратов разбивают на 4 равных квадрата и так далее. После конечного числа таких операций квадрат оказывается разбит на меньшие квадраты. Назовём два квадрата разбиения *соседними*, если сторона одного из них содержит сторону другого (возможно, совпадает с ней). Известно, что в получившемся разбиении стороны любых двух соседних квадратов отличаются в один или в два раза. В какое наименьшее количество цветов заведомо можно раскрасить все квадраты разбиения так, чтобы любые два соседних квадрата были разного цвета?

Кооперативные стратегии

1. Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причём одну из карт кладёт рубашкой вверх, а остальные – картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
2. Каждому из n мудрецов надевают колпак одного из n цветов. Каждый мудрец видит колпаки всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своего колпака, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал, если **(а)** $n = 2$; **(б)** $n = 3$; **(в)** n — любое.
3. **(а)** Зритель пишет на доске слева направо 10 цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр карточкой. После этого входит фокусник и называет закрытую цифру. Докажите, что такой фокус действительно возможен. **(б)** Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из 101 цифры. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). Докажите, что такой фокус действительно возможен.
4. В сундуке 5 колпаков различных цветов. Из сундука вытащили три колпака и вслепую надели троим мудрецам. Мудрецы видят колпаки друг друга, но не видят свой и одновременно пытаются его угадать. Могут ли мудрецы договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы один из них угадывал?
5. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше – съем на обед». **(а)** Смогут ли гномы заранее договориться действовать так, чтобы спастись? **(б)** А если нужно угадать хотя бы четверым?
6. 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным – другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого – 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?
7. У каждого из n мудрецов стоит сундук, в котором лежат шляпы одного из a_n цветов. Одновременно каждому мудрецу надевают шляпу из его сундука. Каждый мудрец

видит шляпы всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. **(а)** Докажите, что если $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 1$, то мудрецы не могут договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них гарантированно угадал. **(б)** Докажите, что если $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq 1$, то мудрецы могут договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них гарантированно угадал.

Кооперативные стратегии-2

1. Король пишет двум мудрецам на лоб по целому числу так, что каждый видит только число другого. После этого их сажают в разные комнаты, дают листочек бумаги и ручку и говорят: пишите конечный набор чисел. Если хотя бы один мудрец напишет своё число, то оба спаслись, в противном случае их казнят. Могут ли мудрецы договориться, чтобы гарантированно справиться с заданием?
2. Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает семь различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?
3. Кашей заточил в темницу толпу пленников и сказал им: «Завтра вам предстоит испытание. Я выберу нескольких из вас (кого захочу, но минимум троих), посажу за круглый стол в каком-то порядке (в каком пожелаю) и каждому на лоб наклею бумажку с нарисованной на ней фигуркой. Фигурки могут повторяться, но никакие две разные фигурки не будут наклеены на одинаковое число людей. Каждый посмотрит на фигурки остальных, а своей не увидит. Подавать друг другу какие-то знаки запрещено. После этого я наклейки сниму и велю всех развести по отдельным камерам. Там каждый должен будет на листе бумаги нарисовать фигурку. Если хоть один нарисует такую, какая была у него на лбу, всех отпущу. Иначе останетесь здесь навечно».

Как пленникам договориться действовать, чтобы спастись?

4. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полукруглость, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?

Лемма Холла

Лемма Холла. Дан двудольный граф. Пусть известно, что для любых k вершин первой доли количество вершин второй доли, которые смежны хотя бы с одной из выбранных k вершин, хотя бы k . Тогда существует паросочетание, содержащее все вершины первой доли.

Альтернативная формулировка. Каждому юноше нравится несколько девушек. Известно, что для любых k юношей количество девушек, которые нравятся хотя бы одному из выбранных юношей, не меньше k . Тогда можно каждому юноше выбрать по невесте так, чтобы всем юношам нравились их невесты.

В первых двух задачах предлагается доказать лемму Холла двумя разными способами. Оба способа будут доказывать лемму Холла по индукции по числу юношей.

- (а) Возьмём произвольного юношу и женим его на знакомой с ним девушке и забудем про них. Опишите явно, в каком случае предположение индукции неприменимо к оставшемуся графу.

(б) Ответ к пункту а — наличие некоторого множества юношей специального вида. Попробуйте применить предположение индукции к этому множеству. Опишите явно, когда это невозможно.

(в) Завершите доказательство леммы Холла.
- Чтобы воспользоваться индукцией, достаточно применить предположение индукции ко всем юношам, кроме какого-то одного. Предположение индукции выдало нам некоторое паросочетание. Остался один юноша. Рассмотрим следующий процесс: образуем тайное общество, в которое изначально входит только неженатый юноша. Добавим в тайное общество всех его знакомых девушек и всех их мужей, если они есть. Затем снова добавим всех девушек, знакомых хотя бы с одним юношей из тайного общества, и всех мужей этих девушек, и так далее.

(а) Докажите, если в какой-то момент незамужняя девушка попала в тайное общество, то тайное общество можно переженить так, чтобы у каждого юноши была невеста.

(б) Докажите, что одна из незамужних девушек действительно когда-нибудь попадет в тайное общество. Завершите доказательство.
- На чаепитие собрались N школьников, каждый принес по K пирожных. Все пирожные разложили на N тарелок по K на тарелку. Докажите, что как бы ни были разложены пирожные, можно так раздать тарелки, что каждому достанется хотя бы одно пирожное, которое он сам принес.
- В клетках таблицы $n \times (n + d)$ (n строк, $n + d$ столбцов) расставлены фишки. Известно, что если в таблице оставить любые k столбцов, то останется не менее $k - d$ непустых строк. Докажите, что можно выбрать n фишек, стоящих в разных столбцах и строках.
- Пусть d — натуральное число. Дано несколько множеств. Известно, что объедине-

ние любых k множеств содержит хотя бы kd элементов. Докажите, из каждого множества можно выбрать по d элементов так, чтобы все выбранные элементы были различны.

6. В магазине продаются комплекты котлеток и пюreshек разных видов, в каждом комплекте по одной котлетке и одной пюreshке. Известно, что каждый вид котлеты входит ровно в 100 комплектов и каждый вид пюре входит в 100 комплектов. Купить все комплекты (каждый в единственном экземпляре) стоит 100 тугриков. Миша хочет купить несколько комплектов так, что каждый вид пюре входит ровно в один комплект и каждый вид котлет входит ровно в один комплект. Докажите, что он может сделать это, заплатив не более 1 тугрика.

Лемма Холла. Практика

1. Квадрат двумя различными способами разбит на N кусков одинаковой площади. Докажите, что в нем можно выбрать N точек так, чтобы в каждом куске каждого разбиения было ровно по одной выбранной точке.
2. Десять школьников решали десять задач. Известно, что каждый школьник решил хотя бы k задач, и каждую задачу решило хотя бы k школьников. Для какого наименьшего k можно гарантированно провести разбор так, чтобы каждый школьник рассказал по одной задаче, которую решил?
3. (а) Петя выписал все 1000-элементные подмножества 2025-элементного множества. Докажите, что Вася может приписать по элементу в каждое подмножество так, чтобы образовавшиеся 1001-элементные подмножества были попарно различными
(б) Какое наибольшее количество подмножеств 2025-элементного множества можно выбрать так, чтобы никакое выбранное множество не являлось подмножеством другого выбранного множества?
4. Дано натуральное n и ориентированный граф, в котором исходящие степени всех вершин равны n , и входящие степени всех вершин равны n . Докажите, что в данном графе можно выбрать несколько простых ориентированных циклов так, чтобы каждая вершина содержалась ровно в одном из них.
5. Клетки шахматной доски 8×8 занумерованы числами от 1 до 16 так, что каждое число встречается четырежды. Докажите, что можно выбрать 16 клеток, занумерованные разными числами, так что на каждой вертикали и каждой горизонтали найдется хотя бы по одной выбранной клетке.
6. Даны n мальчиков и $2n - 1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).
7. В турнире по волейболу участвует 16 команд. Они играют однокруговой турнир: каждый тур команды разбиваются на 8 пар и играют между собой. Ничьих в волейболе не бывает. Докажите, что в каждом туре можно выбрать матч так, чтобы победители этих матчей были попарно различными.
8. В некоторой стране каждый город соединен авиарейсами с не менее чем 40 и не более, чем 70 другими. Докажите, что можно отменить несколько рейсов так, чтобы каждый город был соединен с не менее, чем 20, и не более, чем 50 другими.

Лемма Холла. Практика. Добавка

1. В турнире по волейболу участвует 16 команд. Они играют однокруговой турнир: каждый тур команды разбиваются на 8 пар и играют между собой. Ничьих в волейболе не бывает. Докажите, что в каждом туре можно выбрать матч так, чтобы победители этих матчей были попарно различными.
2. В некоторой стране каждый город соединен авиарейсами с не менее чем 40 и не более, чем 70 другими. Докажите, что можно отменить несколько рейсов так, чтобы каждый город был соединен с не менее, чем 20, и не более, чем 50 другими.

Алгебраические конструкции в комбинаторике

1. Куб $8 \times 8 \times 8$ разбит на единичные кубики. Какое наибольшее количество ладей можно поставить в некоторые кубики так, чтобы не было двух ладей, находящихся в одном ряду?
2. В меню столовой есть n салатов, n супов и n вторых блюд. Обед состоит из салата, супа и второго блюда. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая пара блюд не повторилась?
3. В условиях предыдущей задачи в обновлённом меню появились ещё n десертов, и теперь обед включает в себя ещё и десерт. Какое максимальное число обедов можно устроить так, чтобы никакая тройка блюд не повторилась?
4. Алфавит состоит из k букв, словом считается любая последовательность из n букв алфавита. Два слова *похожи*, если они различаются ровно в одной букве. В какое минимальное число цветов можно раскрасить все слова, так чтобы любые два похожих слова были разного цвета?
5. Дано нечётное натуральное число n . Предположим, что в греческом алфавите n букв и в латинском алфавите тоже n букв. Докажите, что в каждую клетку квадрата $n \times n$ можно поставить две буквы — одну греческую и одну латинскую — так, чтобы в каждом ряду ни греческие, ни латинские буквы не повторялись и чтобы ни в каких двух клетках не была написана одна и та же пара букв.
6. Компания из **(а)** 8; **(б)** 2^k друзей ($k \geq 2$) — завсегдатаи клуба интеллектуальных игр. На каждую игру они выставляют команду из четырёх человек. Какое минимальное число игр потребуется друзьям для того, чтобы любые трое из них хотя бы раз оказались в одной команде?
7. В соревнованиях «Слесарь Года» участвуют 81 слесарей. У каждого слесаря есть свой *разряд* — натуральное число, известное только ему. Разряды всех слесарей различны. В одном раунде участвуют три слесаря, и по итогам раунда выявляется победитель — обладатель высшего разряда. Расписание составляется заранее и по ходу соревнований не меняется. Какое наименьшее число раундов необходимо для выявления сильнейшего слесаря?
8. Квадрат разбивают на 4 равных квадрата. Затем один из получившихся квадратов тоже разбивают на 4 равных квадрата, один из (семи) имеющихся после этого квадратов разбивают на 4 равных квадрата и так далее. После конечного числа таких операций квадрат оказывается разбит на меньшие квадраты. Назовём два квадрата разбиения *соседними*, если сторона одного из них содержит сторону другого (возможно, совпадает с ней). Известно, что в получившемся разбиении стороны любых двух соседних квадратов отличаются в один или в два раза. В какое наименьшее количество цветов заведомо можно раскрасить все квадраты разбиения так, чтобы любые два соседних квадрата были разного цвета?

Кооперативные стратегии

1. Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причём одну из карт кладёт рубашкой вверх, а остальные – картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
2. Каждому из n мудрецов надевают колпак одного из n цветов. Каждый мудрец видит колпаки всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своего колпака, написав его на бумажках. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них угадал, если **(а)** $n = 2$; **(б)** $n = 3$; **(в)** n — любое.
3. **(а)** Зритель пишет на доске слева направо 10 цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр карточкой. После этого входит фокусник и называет закрытую цифру. Докажите, что такой фокус действительно возможен. **(б)** Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из 101 цифры. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). Докажите, что такой фокус действительно возможен.
4. В сундуке 5 колпаков различных цветов. Из сундука вытащили три колпака и вслепую надели троим мудрецам. Мудрецы видят колпаки друг друга, но не видят свой и одновременно пытаются его угадать. Могут ли мудрецы договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы один из них угадывал?
5. Дракон запер в пещере шестерых гномов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого каждый втайне от других скажет мне цвет спрятанного колпака. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше – съем на обед». **(а)** Смогут ли гномы заранее договориться действовать так, чтобы спастись? **(б)** А если нужно угадать хотя бы четверым?
6. 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным – другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого – 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?
7. У каждого из n мудрецов стоит сундук, в котором лежат шляпы одного из a_n цветов. Одновременно каждому мудрецу надевают шляпу из его сундука. Каждый мудрец

видит шляпы всех других мудрецов, но не видит своего. Они должны одновременно попытаться угадать цвет своей шляпы, написав его на бумажках. **(а)** Докажите, что если $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 1$, то мудрецы не могут договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них гарантированно угадал. **(б)** Докажите, что если $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq 1$, то мудрецы могут договориться действовать так, чтобы хотя бы один из них гарантированно угадал.

Кооперативные стратегии-2

1. Король пишет двум мудрецам на лоб по целому числу так, что каждый видит только число другого. После этого их сажают в разные комнаты, дают листочек бумаги и ручку и говорят: пишите конечный набор чисел. Если хотя бы один мудрец напишет своё число, то оба спаслись, в противном случае их казнят. Могут ли мудрецы договориться, чтобы гарантированно справиться с заданием?
2. Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает семь различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?
3. Кашей заточил в темницу толпу пленников и сказал им: «Завтра вам предстоит испытание. Я выберу нескольких из вас (кого захочу, но минимум троих), посажу за круглый стол в каком-то порядке (в каком пожелаю) и каждому на лоб наклею бумажку с нарисованной на ней фигуркой. Фигурки могут повторяться, но никакие две разные фигурки не будут наклеены на одинаковое число людей. Каждый посмотрит на фигурки остальных, а своей не увидит. Подавать друг другу какие-то знаки запрещено. После этого я наклейки сниму и велю всех развести по отдельным камерам. Там каждый должен будет на листе бумаги нарисовать фигурку. Если хоть один нарисует такую, какая была у него на лбу, всех отпущу. Иначе останетесь здесь навечно».

Как пленникам договориться действовать, чтобы спастись?

4. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полукруглость, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?