Образовательная программа в «Сириусе»
1–11 декабря 2024 г., 8 класс
Материалы занятий

Содержание

I Алгебра **5**

1 8м1 **5**
Метод Штурма . . . 5
Метод Штурма. Добавка . . . 7
Квадратный трёхчлен . . . 7
Метод Штурма - 2 . . . 9
Квадратный трёхчлен - 2 . . . 9
Неравенство о средних . . . 11
Последовательности . . . 11
Неравенство о средних - 2 . . . 13

2 8м2 **13**
Метод Штурма . . . 13
Квадратный трёхчлен . . . 15
Метод Штурма - 2 . . . 15
Квадратный трёхчлен - 2 . . . 17
Неравенство о средних . . . 17
Последовательности . . . 19

II Геометрия **19**

1 8м1 **21**
Ортоцентр, теория . . . 21
Ортоцентр, практика . . . 21
Ортоцентр, добавка . . . 23
Лемма о трезубце . . . 23
Окружность Эйлера . . . 25
Степень точки . . . 25
Степень точки. Добавка . . . 27
Идейные задачи напоследок . . . 27
Добавка . . . 29

2 8м2 **29**
Ортоцентр, теория . . . 29
Ортоцентр, практика . . . 31
Ортоцентр, добавка . . . 31
Лемма о трезубце . . . 33

Окружность Эйлера . . . 33
Степень точки . . . 35
Степень точки. Добавка . . . 35
Идейные задачи напоследок . . . 37

III Комбинаторика **37**

1 8м1 **39**
Подсчёт двумя способами . . . 39
Подсчёт двумя способами. Добавка . . . 39
Усреднение . . . 41
Подсчёт и усреднение . . . 41
Триангуляции . . . 43
Круговые шаблоны . . . 43
Кодирование . . . 45
Кодирование. Добавка . . . 45

2 8м2 **47**
Подсчёт двумя способами . . . 47
Усреднение . . . 47
Подсчёт и усреднение . . . 49
Триангуляции . . . 49
Круговые шаблоны . . . 51
Кодирование . . . 51

Часть I

Алгебра

1 8м1

[ЦПМ, кружок по математике, 8 класс] Ложкин Михаил Алексеевич
[*2024–2025 уч. г.*] группа 8-1 *1 декабря 2024*

Метод Штурма

1. Даны положительные числа $a_1 < a_2 \leqslant b_2 < b_1$, причём $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$. Сравните числа

(а) $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$;

(б) $a_1^2 + b_1^2$ и $a_2^2 + b_2^2$;

(в) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$ и $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}$;

(г) $\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1}$ и $\sqrt{a_2} + \sqrt{b_2}$.

(д) Пусть теперь положительные числа $a_1 < a_2 \leqslant b_2 < b_1$ таковы, что $a_1 b_1 = a_2 b_2$. Сравните числа $a_1 + b_1$ и $a_2 + b_2$. Как изменятся ответы в пунктах **(б)**, **(в)**, **(г)**?

2. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенству $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. **(а)** Докажите неравенство

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \ldots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

(б) Докажите неравенство

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \geqslant \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

3. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют равенству $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Докажите неравенство

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 2^n.$$

4. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\sqrt{1+5x} + \sqrt{1+5y} + \sqrt{1+5z}.$$

5. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с суммой 1. Докажите, что

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{x_1 x_2 \cdots x_n} \geqslant (n-1)^n.$$

6. Сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна 1. Докажите неравенство

$$(1+a_1)(2+a_2)\cdots(n+a_n) \leqslant 2n!.$$

7. Для положительных чисел x, y, z выполняется равенство $x + y + z = 1$. Докажите неравенство

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

Метод Штурма. Добавка

1. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения
$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n.$$

2. Известно, что числа a, b, c, d неотрицательны и $a + b + c + d = 1$. Докажите неравенство
$$abc + bcd + cda + dab \leqslant \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

Квадратный трёхчлен

1. Про вещественные числа a, b, c известно, что $c(a + b + c) < 0$. Докажите, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня.

2. Даны ненулевые вещественные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы один из трёхчленов
$$ax^2 + 2bx + c, \quad bx^2 + 2cx + a, \quad cx^2 + 2ax + b$$
имеет корень.

3. Квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b + 1$ имеет два натуральных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ — составное.

4. Даны три приведённых квадратных трёхчлена с дискриминантами 25, 49 и 144. Лена хочет разбить шесть корней этих трёхчленов на две группы с равными суммами. Всегда ли ей удастся сделать это?

5. Ваня вступил в Клуб Любителей Алгебры и на очередном мероприятии записал на доску квадратный трёхчлен $x^2 + 1111x + 2222$, после чего участники клуба друг за другом меняли на единицу либо свободный член, либо коэффициент при x. В результате на доске оказался трёхчлен $x^2 + 2222x + 1111$. Правда ли, что в какой-то момент на доске обязательно оказался трёхчлен с целыми корнями?

6. Вадим сообщил Артемию пять целых чисел — коэффициенты и корни некоторого квадратного трёхчлена. Рассеянный Артемий забыл одно из этих чисел, зато он помнит, что оставшимися числами были $2, 3, 4, -5$ в каком-то порядке. Помогите Артемию восстановить забытое число.

7. Ваня выписал на доску числа $2^0, 2^1, \dots, 2^{2024}$. Вадим хочет разбить эти числа на две группы с суммами p и q так, чтобы квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$ имел целый корень. Сколькими способами он может это сделать?

8. Маша написала на доске квадратный трёхчлен x^2+4x+3. Если на доске написан квадратный трёхчлен $P(x)$, то Лена может дописать на доску новый трёхчлен, равный либо $x^2P\left(\frac{1}{x}+1\right)$, либо $(x-1)^2P\left(\frac{1}{x-1}\right)$. Сможет ли Лена за несколько описанных операций получить на доске трёхчлен $x^2 + 10x + 9$?

Метод Штурма - 2

1. **Неравенство о средних.** Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \overset{(1)}{\leqslant} \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \overset{(2)}{\leqslant} \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \overset{(3)}{\leqslant} \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

(а) Докажите неравенство (1);

(б) Докажите неравенство (2);

(в) Докажите неравенство (3).

2. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}.$$

3. **(а)** Даны вещественные числа $a, b \in [0,1]$. Докажите, что

$$\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a} \leqslant 1.$$

(б) Даны вещественные числа $a, b, c, d \in [1,2]$. Докажите неравенство

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{c+d}{d+a} \leqslant \frac{9}{4}.$$

4. У Вадима на столе лежат 100 карандашей семи цветов. Пара карандашей называется *красивой*, если эти карандаши разных цветов. Найдите наибольшее возможное число красивых пар.

5. Неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 = n$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$(a_1^2+a_1)(a_2^2+a_2)\cdots(a_n^2+a_n).$$

6. **(а)** Докажите, что из всех выпуклых треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшей будет площадь правильного треугольника.

(б) Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшей будет площадь правильного n-угольника.

7. Про положительные числа x, y, z известно, что $x+y+z=3$. Докажите, что

$$x^2y+y^2z+z^2x \leqslant 4.$$

Квадратный трёхчлен - 2

1. Дискриминант приведённого квадратного трёхчлена $P(x)$ положителен и равен D. Сколько корней может иметь трёхчлен

$$P(x)+P\left(x+\sqrt{D}\right)?$$

2. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$. Известно, что у трёхчлена $P(x)-x$ нет корней. Докажите, что уравнение $P(P(x))-x=0$ не имеет решений.

3. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c, для которых выполняются равенства

$$P(a)=P(b+c),\ P(b)=P(c+a),\ P(c)=P(a+b).$$

4. Даны три квадратных трёхчлена $f(x), g(x), h(x)$ с положительными старшими коэффициентами. Оказалось, что любой из этих трёхчленов имеет общий корень с суммой двух оставшихся. Докажите, что все они имеют общий корень.

5. Про ненулевые вещественные числа a, b, c известно, что $5a+4b+5c=0$. Докажите, что у квадратного трёхчлена ax^2+bx+c есть корень на отрезке $[0,2]$.

6. Вадим хочет отметить точки X_1, X_2, X_3, X_4 на параболе $y=x^2$ и точки Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 на параболе $y=2x^2$ так, чтобы четырёхугольники $X_1X_2X_3X_4$ и $Y_1Y_2Y_3Y_4$ были равны. Получится ли у Вадима сделать это?

7. Ваня, Лена и Артемий придумали по квадратному трёхчлену $P(x), Q(X)$ и $R(x)$. Может ли уравнение

$$P(Q(R(x)))=0$$

иметь в качестве решений числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$?

8. Артемий рисует на координатной плоскости параболы вида $y=x^2+ax+b$, пересекающие оси координат в трёх различных точках. Затем для каждой параболы он рисует окружность, проходящую через эти три точки. Докажите, что все нарисованные окружности пересекаются в одной точке.

Замечание. Если сейчас у вас не получается решить эту задачу, попробуйте вернуться к ней ближе к концу программы.

Неравенство о средних

Решения задач этого листка, использующие метод Штурма, не принимаются!

Неравенство о средних. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

1. Для натурального числа n докажите, что

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{n^n}{n+1}.$$

2. **(а)** Найдите наименьшее возможное значение дроби

$$\frac{16 + 81x^4}{x^2}.$$

(б) Найдите наименьшее возможное значение дроби

$$\frac{2x^2 + 3}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

3. Даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

4. Пусть a, b, c, d — положительные числа. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{d}} + \sqrt{\frac{c+d}{a}} + \sqrt{\frac{d+a}{b}} \geqslant 4\sqrt{2}.$$

5. Даны положительные числа a, b, c. Докажите, что

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c} \geqslant 2.$$

6. Даны положительные числа a и b, причём $a > b$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$a + \frac{1}{b(a-b)}.$$

7. Найдите все положительные числа a, b, c, d, для которых выполняются равенства

$$a + b + c + d = 12, \quad abcd = 27 + ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

Последовательности

1. Последовательность чисел $\{x_n\}$ определяется условиями

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 25, \quad x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль и найдите номер этого члена.

2. Ваня придумал бесконечную возрастающую последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и бесконечную последовательность простых чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots$, и заметил, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Кроме того, оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство

$$a_n - a_k = p_n - p_k.$$

Докажите, что все числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ являются простыми.

3. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел, что для любого натурального k сумма любых k идущих подряд членов этой последовательности делится на $k + 1$?

4. Можно ли выбрать бесконечное количество натуральных чисел так, чтобы разность любых двух выбранных чисел (где из большего вычитается меньшее) была квадратом натурального числа?

5. Артемий выдумал бесконечную последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, и обнаружил, что при любом натуральном n выполнено одно из двух условий: либо число $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ является целым нечётным числом, большим 1, либо $a_{n+1} - a_n = 1$. Докажите, что последовательность Артемия содержит степень тройки.

6. Среди натуральных чисел $a_1, \ldots, a_k$, нет одинаковых, а разность между наибольшим и наименьшим из них меньше 1000. При каком наибольшем k может случиться, что все квадратные уравнения $a_i x^2 + 2a_{i+1}x + a_{i+2} = 0$, где $1 \leqslant i \leqslant k$–2, не имеют корней?

Неравенство о средних - 2

Решения задач этого листка, использующие метод Штурма, не принимаются!

1. **(а)** Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + 2c^2 \geqslant 4abc.$$

(б) Для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ докажите неравенство

$$(n+1)\sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}} - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant a_{n+1}.$$

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа с произведением 1. Докажите, что

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n \geqslant \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

3. Докажите, что для натуральных a, b, c выполнено

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \leqslant a^a b^b c^c \leqslant \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}.$$

4. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ca.$$

2 8м2

Метод Штурма

1. Даны положительные числа $a_1 < a_2 \leqslant b_2 < b_1$, причём $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$. Сравните числа

(а) $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$;

(б) $a_1^2 + b_1^2$ и $a_2^2 + b_2^2$;

(в) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$ и $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}$;

(г) $\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1}$ и $\sqrt{a_2} + \sqrt{b_2}$.

(д) Пусть теперь положительные числа $a_1 < a_2 \leqslant b_2 < b_1$ таковы, что $a_1 b_1 = a_2 b_2$. Сравните числа $a_1 + b_1$ и $a_2 + b_2$.

2. **(а)** Положительные числа a и b в сумме дают 1. Найдите наибольшее возможное значение числа ab.

(б) Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$. Докажите, что $abc \leqslant \frac{1}{27}$.

(в) Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в сумме дают 1. Докажите, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}$.

3. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенству $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. **(а)** Докажите неравенство

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \ldots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

(б) Докажите неравенство

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \geqslant \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

4. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют равенству $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Докажите неравенство

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 2^n.$$

5. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\sqrt{1+5x} + \sqrt{1+5y} + \sqrt{1+5z}.$$

6. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с суммой 1. Докажите, что

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}{x_1 x_2 \cdots x_n} \geqslant (n-1)^n.$$

7. Сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна 1. Докажите неравенство

$$(1+a_1)(2+a_2)\cdots(n+a_n) \leqslant 2n!.$$

8. Для положительных чисел x, y, z выполняется равенство $x + y + z = 1$. Докажите неравенство

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

Квадратный трёхчлен

1. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ с вещественными коэффициентами имеет корни. Верно ли, что квадратный трёхчлен **(а)** $a^3x^2 + b^3x + c^3$; **(б)** $a^4x^2 + b^4x + c^4$ также имеет корни?

2. Про вещественные числа a, b, c известно, что $c(a + b + c) < 0$. Докажите, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня.

3. **(а)** Даны ненулевые вещественные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы один из трёхчленов

$$ax^2 + 2bx + c, \quad bx^2 + 2cx + a, \quad cx^2 + 2ax + b$$

имеет корень.

(б) Докажите, что при любых значениях a, b, c хотя бы одно из уравнений

$$x^2 + ax + b = 1, \quad x^2 + bx + c = 1, \quad x^2 + cx + a = 1.$$

4. Квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b + 1$ имеет два натуральных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ — составное.

5. Даны три приведённых квадратных трёхчлена с дискриминантами 25, 49 и 144. Лена хочет разбить шесть корней этих трёхчленов на две группы с равными суммами. Всегда ли ей удастся сделать это?

6. Ваня вступил в Клуб Любителей Алгебры и на очередном мероприятии записал на доску квадратный трёхчлен $x^2 + 1111x + 2222$, после чего участники клуба друг за другом меняли на единицу либо свободный член, либо коэффициент при x. В результате на доске оказался трёхчлен $x^2 + 2222x + 1111$. Правда ли, что в какой-то момент на доске обязательно оказался трёхчлен с целыми корнями?

Метод Штурма - 2

1. **Неравенство о средних.** Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \overset{(1)}{\leqslant} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \overset{(2)}{\leqslant} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \overset{(3)}{\leqslant} \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

(а) Докажите неравенство (1);

(б) Докажите неравенство (2);

(в) Докажите неравенство (3).

2. **(а)** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \ldots + \frac{1}{1 + x_n} \geqslant \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}.$$

(б) Пусть $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \ldots + \frac{1}{1 + x_n} \leqslant \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}.$$

3. Даны вещественные числа $a, b \in [0, 1]$. Докажите, что

$$\frac{a}{1 + b} + \frac{b}{1 + a} \leqslant 1.$$

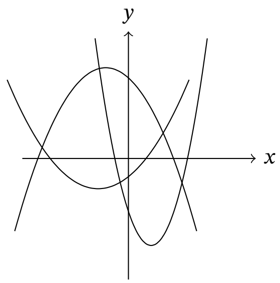
4. У Вадима на столе лежат 100 карандашей семи цветов. Пара карандашей называется *красивой*, если эти карандаши разных цветов. Найдите наибольшее возможное число красивых пар.

5. Неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = n$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$(a_1^2 + a_1)(a_2^2 + a_2) \cdots (a_n^2 + a_n).$$

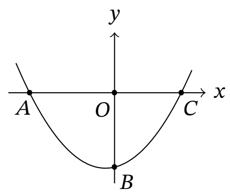
Квадратный трёхчлен - 2

1. На рисунке ниже изображены графики трёх квадратных трёхчленов. Могут ли эти трёхчлены иметь вид $ax^2 + bx + c, bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$ для некоторых вещественных a, b, c?



2. Существуют ли такие три квадратных трёхчлена, что каждый из них имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух из них корней не имеет?

3. На рисунке ниже изображён график квадратного трёхчлена $x^2 + ax + b$. Оказалось, что прямая AB перпендикулярна прямой, заданной уравнением $y = x$. Найдите длину отрезка OC.



4. Дискриминант приведённого квадратного трёхчлена положителен и равен D. Сколько корней может иметь трёхчлен

$$P(x) + P\left(x + \sqrt{D}\right)?$$

5. Про квадратные трехчлены f_1, f_2, f_3 с различными старшими коэффициентами известно, что их разности $f_1 - f_2, f_2 - f_3$ и $f_3 - f_1$ имеют по одному корню. Докажите, что корни разностей совпадают.

6. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(a) = P(b + c),\ P(b) = P(c + a),\ P(c) = P(a + b).$$

7. Даны три квадратных трёхчлена $f(x), g(x), h(x)$ с положительными старшими коэффициентами. Оказалось, что любой из этих трёхчленов имеет общий корень с суммой двух оставшихся. Докажите, что все они имеют общий корень.

8. Про ненулевые вещественные числа a, b, c известно, что $5a + 4b + 5c = 0$. Докажите, что у квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ есть корень на отрезке $[0, 2]$.

Неравенство о средних

Решения задач этого листка, использующие метод Штурма, не принимаются!

Неравенство о средних. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

2. Для натурального числа n докажите, что

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{n^n}{n+1}.$$

3. **(а)** Найдите наименьшее возможное значение дроби

$$\frac{16 + 81x^4}{x^2}.$$

(б) Найдите наименьшее возможное значение дроби

$$\frac{2x^2 + 3}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

4. Даны положительные числа a, b, c. Докажите, что

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c} \geqslant 2.$$

5. Даны положительные числа a, b, c. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \geqslant \frac{9}{2(a + b + c)}.$$

6. Пусть a, b, c, d — положительные числа. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a + b}{c}} + \sqrt{\frac{b + c}{d}} + \sqrt{\frac{c + d}{a}} + \sqrt{\frac{d + a}{b}} \geqslant 4\sqrt{2}.$$

Последовательности

1. Последовательность чисел $\{x_n\}$ определяется условиями

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 25, \quad x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль и найдите номер этого члена.

2. Миша задумал натуральное число n. Маша выписывает на доску строго возрастающую последовательность натуральных чисел такую, что $a_{k+1} \leqslant 2k$ при любом $k \geqslant 1$. Докажите, что найдутся два члена этой последовательности, которые отличаются ровно на n.

3. Ваня придумал бесконечную возрастающую последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и бесконечную последовательность простых чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots$, и заметил, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Кроме того, оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство

$$a_n - a_k = p_n - p_k.$$

Докажите, что все числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ являются простыми.

4. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел, что для любого натурального k сумма любых k идущих подряд членов этой последовательности делится на $k + 1$?

5. Вадим выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

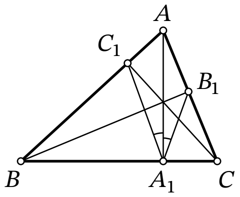
6. Артемий выдумал бесконечную последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, и обнаружил, что при любом натуральном n выполнено одно из двух условий: либо число $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ является целым нечётным числом, большим 1, либо $a_{n+1} - a_n = 1$. Докажите, что последовательность Артемия содержит степень тройки.

Часть II

Геометрия

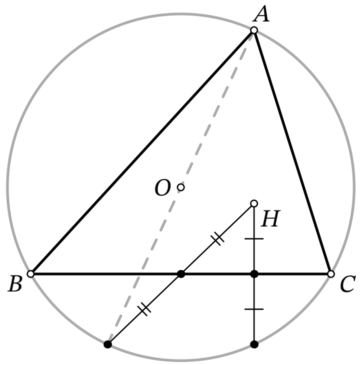
1 8м1

Ортоцентр, теория

1. 

Высоты треугольника являются биссектрисами углов его орто-треугольника.
Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что A_1A — биссектриса треугольника $A_1B_1C_1$.

2. **Лемма об отражении ортоцентра.**
Пусть H — ортоцентр треугольника ABC.
(а) Докажите, что точка, симметричная H относительно BC, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.
(б) Докажите, что точка, симметричная H относительно середины стороны BC, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, и диаметрально противоположна точке A.



3. Пусть точки H и O — ортоцентр и центр окружности, описанной около треугольника ABC, соответственно. **(а)** Докажите, что $\angle BAO = \angle CAH$.
(б) Пусть BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что прямая B_1C_1 параллельна касательной, проведённой в точке A к описанной окружности треугольника ABC.

4. **(а)** Докажите, что расстояние от вершины A до ортоцентра вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до стороны BC.
(б) **Прямая Эйлера.** Докажите, что ортоцентр H, центр описанной окружности O и точка пересечения медиан M лежат на одной прямой.

5. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам.

Ортоцентр, практика

1. Высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y — середины отрезков BC и AH соответственно. Докажите, что прямые XY и B_1C_1 перпендикулярны.

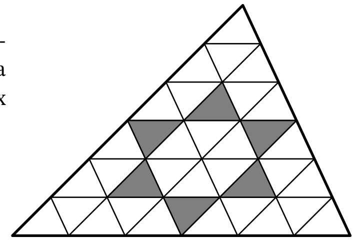
2. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC нашлись такие точки M и N соответственно, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA — биссектриса угла MPN.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки H и O — его ортоцентр и центр описанной окружности соответственно. Серединный перпендикуляр к отрезку BH пересекает стороны AB и BC в точках A_1 и C_1. Докажите, что OB — биссектриса угла A_1OC_1.

4. В остроугольном треугольнике ABC отмечен ортоцентр H и середина M стороны BC. Прямая, проходящая через H и перпендикулярная MH, пересекает стороны AB, AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что точка H — середина отрезка XY.

5. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

6. Произвольный треугольник разрезали на равные треугольники прямыми, параллельными сторонам (как показано на рисунке). Докажите, что ортоцентры шести закрашенных треугольников лежат на одной окружности.



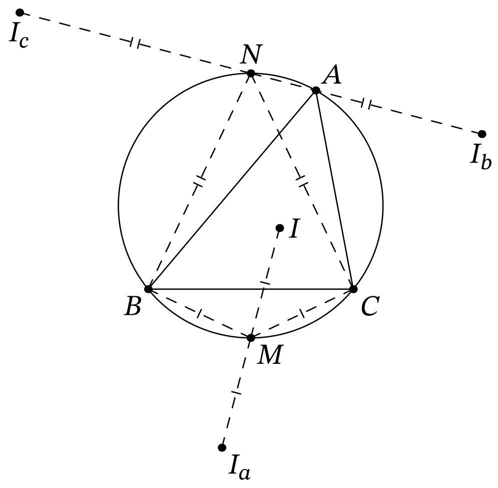
Ортоцентр, добавка

1. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит на прямой BC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается окружности ω.

2. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Прямая B_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках M и N так, что B_1 лежит на отрезке C_1N. Пусть R — точка пересечения прямых BM и A_1C_1, а S — точка пересечения прямых CN и A_1B_1. Докажите, что вершины четырёхугольника $MRSN$ равноудалены от точки A.

Лемма о трезубце

1. **(а) Лемма о трезубце.**
В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC, M — середина «меньшей» дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $MB = MC = MI = MI_a$.
(б) Внешняя лемма о трезубце.
В треугольнике ABC точки I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон AC и AB соответственно, N — середина «большей» дуги BC (т. е. дуги, содержащей точку A). Докажите, что $NB = NC = NI_b = NI_c$.



2. Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

3. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. В треугольники ABC и ABD вписаны окружности с центрами I_1 и I_2. Докажите, что прямая I_1I_2 перпендикулярна BC.

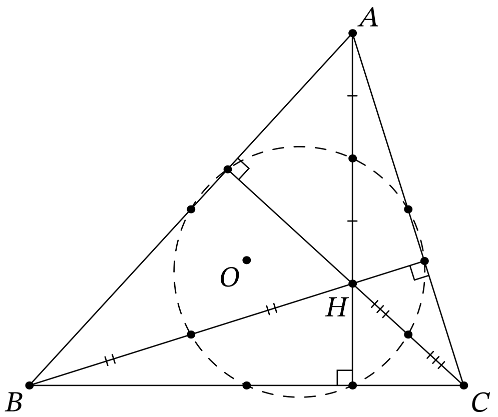
4. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, повторно пересекает окружность ω_1 в точке D, окружность ω_2 — в точке E, а прямую AB — в точке C. Докажите, что $CD = CE$.

5. Точки D, E, F — середины «малых» дуг BC, CA и AB описанной окружности треугольника ABC. Треугольники ABC и DEF в пересечении образуют шестиугольник. Докажите, что его главные диагонали пересекаются в одной точке.

6. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$.
(а) Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB, ABC, являются вершинами прямоугольника.
(б) Докажите, что центры вписанных и всех вневписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB, ABC лежат в вершинах «сетки», образованной точками пересечения двух перпендикулярных четвёрок параллельных прямых.

Окружность Эйлера

1. **Окружность девяти точек.** Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.
   (а) С помощью леммы о трезубце докажите, что на описанной окружности ортотреугольника лежат середины отрезков AH, BH, CH.
   (б) С помощью внешней леммы о трезубце докажите, что на описанной окружности ортотреугольника лежат середины сторон AB, BC, CA.
   (в) С помощью отражения ортоцентра докажите, что центр окружности Эйлера является серединой отрезка OH.



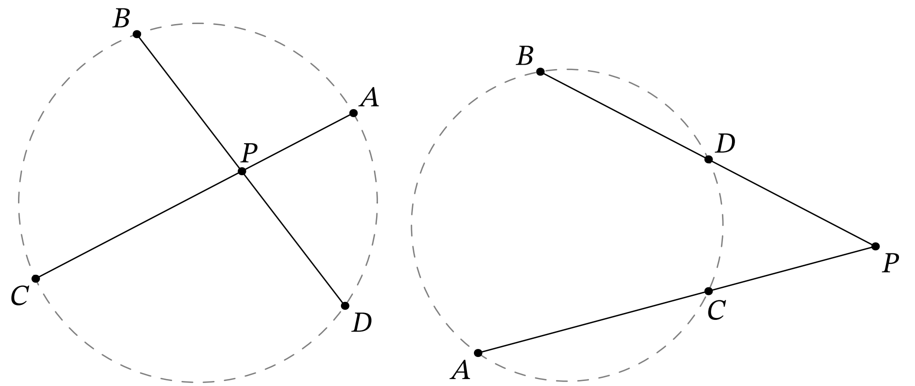
2. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что
   (а) треугольники ABC, HBC, AHC и ABH имеют общую окружность девяти точек;
   (б) прямые Эйлера треугольников ABC, HBC, AHC и ABH пересекаются в одной точке.

3. Рассмотрим три дуги, которые высекают на окружности Эйлера стороны треугольника. Докажите, что одна из них равна сумме двух других.

4. The diagonals of a convex quadrilateral divide it into four triangles. Prove that the nine point centers of these four triangles either lie on one straight line, or are the vertices of a parallelogram.

Степень точки

Определение 1. *Степенью* точки P относительно окружности ω радиуса r с центром в точке O называется величина $\mathrm{Pow}(P, \omega) = OP^2 - r^2$.



1. Для обеих картинок сверху докажите, что пунктирная окружность существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.

Определение 2. *Степенью* точки P относительно окружности ω называется величина $\pm PA{\cdot}PC$, где A и C — точки пересечения произвольной секущей через точку P с окружностью ω. Если точка P лежит вне окружности ω, то произведение берётся со знаком «+», а если внутри — то со знаком «−».

2. Докажите, что определения 1 и 2 степени точки относительно окружности эквивалентны.

3. Докажите, что для точки вне окружности её степень равна квадрату длины отрезка касательной к этой окружности.

4. К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках P и Q, проведена общая касательная AB ($A \in \omega_1$ и $B \in \omega_2$). Докажите, что прямая PQ делит отрезок AB пополам.

5. Пусть ω — окружность, точка P лежит внутри неё, а различные хорды AB, CD, EF этой окружности проходят через P. Докажите, что если $AB = CD = EF$, то P — центр ω.

6. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке P. Известно, что угол $\angle APB$ — острый. Докажите, что длины отрезков касательных, проведённых из точки P к окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.

7. Через центр I вписанной в неравнобедренный треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке K. Из точки I на прямую AK опущен перпендикуляр ID. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

8. **Тождество Эйлера.** Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, а R и r — их радиусы. Докажите, что $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Степень точки. Добавка

1. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H, а O — центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1, лежит на окружности, описанной около треугольника HOA_1.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1, продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N. Точка D плоскости такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что A, C_1, N, D лежат на одной окружности.

Идейные задачи напоследок

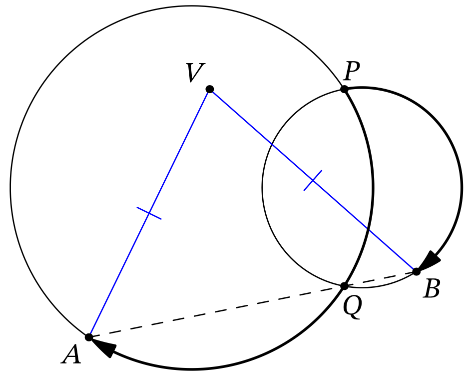
1. Внутри треугольника ABC отмечена точка P, O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников PBC, PCA и PAB. Докажите, что если точки O_a и O_b лежат на прямых PA и PB, то точка O_c лежит на прямой PC.

2. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$. Пусть P –– точка пересечения его диагоналей. Докажите, что ортоцентр треугольника BPC равноудалён от середин отрезков AB и CD.

3. Точка P внутри треугольника ABC такова, что $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$, а I — точка пересечения биссектрис. Докажите, что $AP \geqslant AI$, причём равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка P совпадает с I.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На продолжении отрезка LA за точку A выбрана точка K так, что $AK = AL$. Описанные окружности треугольников BLK и CLK пересекают отрезки AC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

5. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q, одновременно из точки P по часовой стрелке выехали два велосипедиста A и B с одинаковыми угловыми скоростями.
(а) Докажите, что прямая AB в любой момент времени проходит через точку Q.
(б) **Лемма о велосипедистах.** Докажите, что существует такая фиксированная точка V плоскости, что в любой момент времени выполнено $AV = BV$.



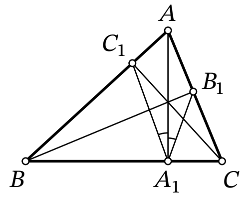
Добавка

1. Пусть BB_1 и CC_1 — высоты осторугольного неравнобедренного треугольника ABC. Описанные окружности треугольников AB_1C_1 и ABC пересекаются в точках A и P. Докажите, что вписанные окружности треугольников BPB_1 и CPC_1 имеют общий центр.

2. В остроугольном треугольнике ABC высоты AH_A, BH_B и CH_C пересекаются в точке H. Через точки, в которых окружность радиуса HH_A с центром H пересекает отрезки BH и CH, проведена прямая ℓ_A. Аналогично проведены прямые ℓ_B и ℓ_C. Докажите, что точка пересечения высот треугольника, образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

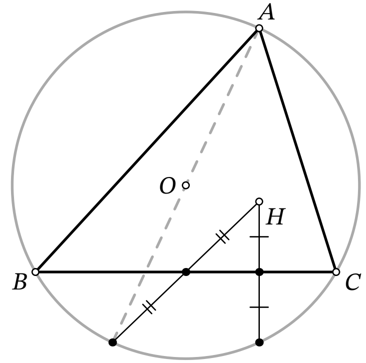
2 8м2

Ортоцентр, теория

1. 

Высоты треугольника являются биссектрисами углов его ортотреугольника.
Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что A_1A — биссектриса треугольника $A_1B_1C_1$.

2. **Лемма об отражении ортоцентра.**
Пусть H — ортоцентр треугольника ABC.
(а) Докажите, что точка, симметричная H относительно BC, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.
(б) Докажите, что точка, симметричная H относительно середины стороны BC, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, и диаметрально противоположна точке A.



3. Пусть точки H и O — ортоцентр и центр окружности, описанной около треугольника ABC, соответственно. **(а)** Докажите, что $\angle BAO = \angle CAH$.
(б) Пусть BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что прямая B_1C_1 параллельна касательной, проведённой в точке A к описанной окружности треугольника ABC.

4. **(а)** Докажите, что расстояние от вершины A до ортоцентра вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до стороны BC.
(б) **Прямая Эйлера.** Докажите, что ортоцентр H, центр описанной окружности O и точка пересечения медиан M лежат на одной прямой.

5. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам.

Ортоцентр, практика

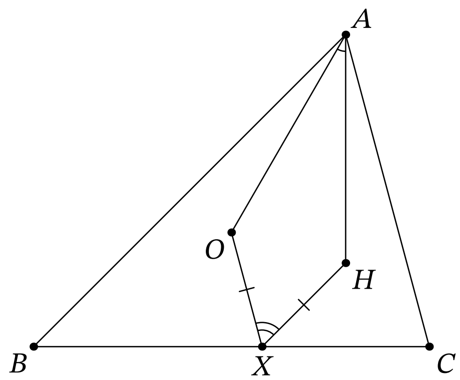
1. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что точка, симметричная A_1 относительно CC_1, лежит на прямой B_1C_1.

2. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Известно, что $\angle BAC = 45°$. Докажите, что четырёхугольник OB_1HC_1 — параллелограмм.

3. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC и AHC, равны между собой.

4. Высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y — середины отрезков BC и AH соответственно. Докажите, что прямые XY и B_1C_1 перпендикулярны.

5. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку OH пересекает сторону BC в точке X. Докажите, что $\angle OXH = 2\angle OAH$.



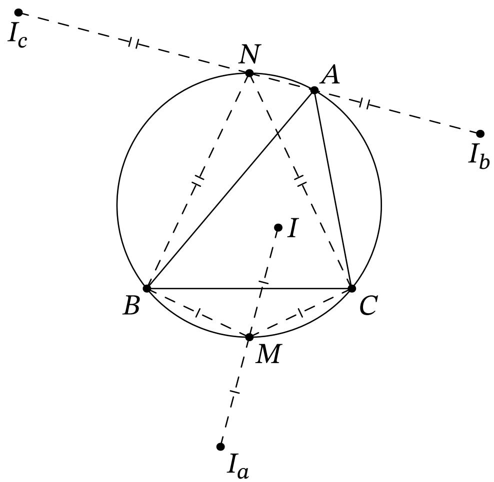
Ортоцентр, добавка

1. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC нашлись такие точки M и N соответственно, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA — биссектриса угла MPN.

2. В остроугольном треугольнике ABC отмечен ортоцентр H и середина M стороны BC. Прямая, проходящая через H и перпендикулярная MH, пересекает стороны AB, AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что точка H — середина отрезка XY.

Лемма о трезубце

1. **(а) Лемма о трезубце.**
В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC, M — середина «меньшей» дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $MB = MC = MI = MI_a$.
(б) Внешняя лемма о трезубце.
В треугольнике ABC точки I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон AC и AB соответственно, N — середина «большей» дуги BC (т. е. дуги, содержащей точку A). Докажите, что $NB = NC = NI_b = NI_c$.



2. Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

3. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. В треугольники ABC и ABD вписаны окружности с центрами I_1 и I_2. Докажите, что прямая I_1I_2 перпендикулярна BC.

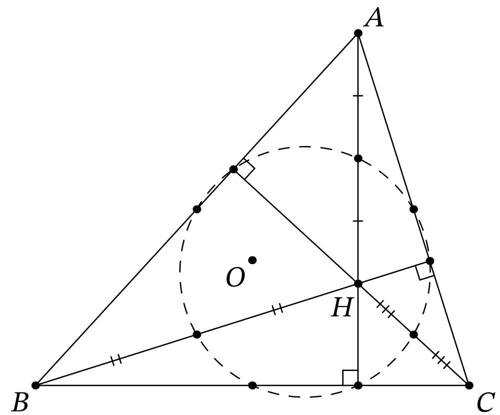
4. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, повторно пересекает окружность ω_1 в точке D, окружность ω_2 — в точке E, а прямую AB — в точке C. Докажите, что $CD = CE$.

5. Точки D, E, F — середины «малых» дуг BC, CA и AB описанной окружности треугольника ABC. Треугольники ABC и DEF в пересечении образуют шестиугольник. Докажите, что его главные диагонали пересекаются в одной точке.

6. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB, ABC, являются вершинами прямоугольника.

Окружность Эйлера

1. **Окружность девяти точек**. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.
(а) С помощью леммы о трезубце докажите, что на описанной окружности ортотреугольника лежат середины отрезков AH, BH, CH.
(б) С помощью внешней леммы о трезубце докажите, что на описанной окружности ортотреугольника лежат середины сторон AB, BC, CA.
(в) С помощью отражения ортоцентра докажите, что центр окружности Эйлера является серединой отрезка OH.

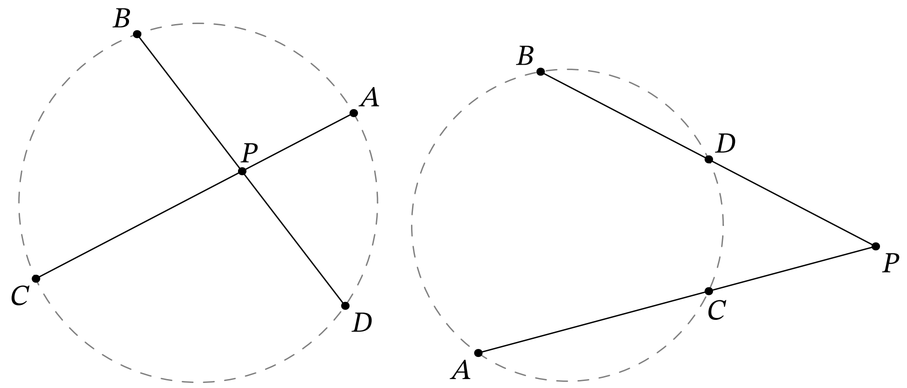


2. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что
(а) треугольники ABC, HBC, AHC и ABH имеют общую окружность девяти точек;
(б) прямые Эйлера треугольников ABC, HBC, AHC и ABH пересекаются в одной точке.

3. Рассмотрим три дуги, которые высекают на окружности Эйлера стороны треугольника. Докажите, что одна из них равна сумме двух других.

Степень точки

Определение 1. *Степенью* точки P относительно окружности ω радиуса r с центром в точке O называется величина $\mathrm{Pow}(P, \omega) = OP^2 - r^2$.



1. Для обеих картинок сверху докажите, что пунктирная окружность существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.

Определение 2. *Степенью* точки P относительно окружности ω называется величина $\pm PA \cdot PC$, где A и C — точки пересечения произвольной секущей через точку P с окружностью ω. Если точка P лежит вне окружности ω, то произведение берётся со знаком «+», а если внутри — то со знаком «−».

2. Докажите, что определения 1 и 2 степени точки относительно окружности эквивалентны.

3. Докажите, что для точки вне окружности её степень равна квадрату длины отрезка касательной к этой окружности.

4. К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках P и Q, проведена общая касательная AB ($A \in \omega_1$ и $B \in \omega_2$). Докажите, что прямая PQ делит отрезок AB пополам.

5. Пусть ω — окружность, точка P лежит внутри неё, а различные хорды AB, CD, EF этой окружности проходят через P. Докажите, что если $AB = CD = EF$, то P — центр ω.

6. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle CAB = \angle DBC$ и $\angle BCA = \angle CDB$. Обозначим через O его точку пересечения диагоналей. Докажите, что длины касательных из точек B и C к описанной окружности треугольника AOD равны.

7. Из точки P вне окружности ω с центром в точке O проведены касательные PA и PB к окружности ω (A и B — точки касания), а также через точку P проведена секущая, пересекающая окружность ω в точках C и D. Докажите, что окружность, описанная около треугольника COD, проходит через середину отрезка AB.

Степень точки. Добавка

1. Через центр I вписанной в неравнобедренный треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке K. Из точки I на прямую AK опущен перпендикуляр ID. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H, а O — центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1 лежит на окружности, описанной около треугольника HOA_1.

3. **Тождество Эйлера.** Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, а R и r — их радиусы. Докажите, что $OI^2 = R^2 - 2Rr$

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1, продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N. Точка D плоскости такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что A, C_1, N, D лежат на одной окружности.

Идейные задачи напоследок

1. Пусть O_a, O_b и O_c — центры описанных окружностей треугольников PBC, PCA и PAB. Докажите, что если точки O_a и O_b лежат на прямых PA и PB, то точка O_c лежит на прямой PC.

2. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$. Пусть P –– точка пересечения его диагоналей. Докажите, что ортоцентр треугольника BPC равноудалён от середин отрезков AB и CD.

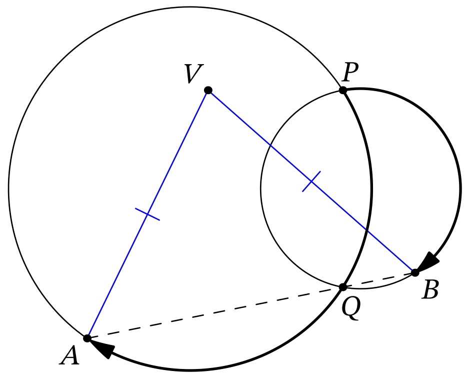
3. Точка P внутри треугольника ABC такова, что $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Докажите, что $AP \geqslant AI$, причём равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка P совпадает с I.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На продолжении отрезка LA за точку A выбрана точка K так, что $AK = AL$. Описанные окружности треугольников BLK и CLK пересекают отрезки AC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

5. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q, одновременно из точки P по часовой стрелке выехали два велосипедиста A и B с одинаковыми угловыми скоростями.

(а) Докажите, что прямая AB в любой момент времени проходит через точку Q.

(б) **Лемма о велосипедистах.** Докажите, что существует такая фиксированная точка V плоскости, что в любой момент времени выполнено $AV = BV$.



Часть III

Комбинаторика

1 8м1

Подсчёт двумя способами

1. На доске 11×10 (11 строк, 10 столбцов) расставлены фишки. Может ли во всех строках быть разное количество фишек, а во всех столбцах – одинаковое?

2. На доске написано несколько натуральных чисел с суммой 100.

   (а) Петя посчитал сколько на доске написано чисел и записал результат. Затем Петя посчитал, сколько чисел, больших 1, было выписано на доску и также записал результат. Потом он посчитал, сколько чисел, больших 2, первоначально было выписано на доске и записал результат. И так далее. Докажите, что сумма выписанных Петей чисел также равна 100.

   (б) Вася проделал те же операции, но только с числами Пети. Докажите, что у Васи получился первоначальный набор чисел.

3. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т. е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т. д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

4. Саша начертил квадрат размером 6×6 клеток и поочередно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону).

5. По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседних чисел, а каждое синее — полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю.

6. Дано натуральное n. Рёбра полного графа на $4n + 1$ вершине покрашены в 2 цвета так, что из каждой вершины исходит ровно $2n$ красных и $2n$ синих рёбер. Сколько одноцветных треугольников могло оказаться в этом графе?

7. Ровно 19 вершин правильного 97-угольника покрашено в белый цвет, остальные вершины покрашены в чёрный. Докажите, что число равнобедренных одноцветных треугольников с вершинами в вершинах 97-угольника не зависит от способа раскраски.

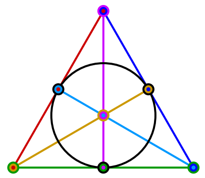
Подсчёт двумя способами. Добавка

1. Кресла для зрителей вдоль лыжной трассы занумерованы по порядку: $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Кассирша продала n билетов на все первые 100 мест, но n больше 100, так как на некоторые места она продала больше одного билета (при этом $n < 1000$). Зрители входят на трассу по одному.Каждый, подойдя к своему месту, занимает его, если оно свободно, если же занято, говорит ”Ох!”, идёт в сторону роста номеров до первого свободного места и занимает его. Каждый раз, обнаружив очередное место занятым, он говорит ”Ох!”. Докажите, что число ”охов” не зависит от того, в каком порядке зрители выходят на трассу.

2. На бумаге ”в клеточку” нарисован выпуклый многоугольник M, так что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идёт по вертикали или горизонтали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключённых внутри M, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки внутри M.

Усреднение

1. В 7 вершинах расставлены числа. Известно, что сумма любых трех, лежащих на одной прямой или на отмеченной окружности, положительна. Может ли сумма всех чисел быть отрицательна?



2. Резиденты детского сада в последний месяц пристрастились к поеданию шоколадных батончиков Twix. Батончик Twix состоит из двух шоколадных палочек. По правилам поедания Twix одну палочку нужно съесть самому, а вторую скормить другому ребёнку. За месяц силами 30 детсадовцев было уничтожено 900 Twix'ов. Докажите, что можно выделить подгруппу из 6 детей, внутри которой было съедено не менее 32 Twix'ов.

3. Взяли две одинаковые шестерёнки с 60 зубьями, и у первой спилили 30 зубьев, а у второй — 40. Докажите, что шестерёнки можно наложить одну на другую так, что совпадут не менее 10 уцелевших зубьев. Является ли оценка точной?

4. Клетчатая доска 20×20 разрезана на фигурки T-тетрамино. Докажите, что можно разрезать доску по клеткам на две части прямолинейным разрезом так, чтобы повредить не более
(а) 7 **(б)** 6 тетраминошек.

5. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале.

6. Докажите, что для любого натурального $n > 3$ существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ путей, проходящих через каждую вершину ровно 1 раз.

7. Пусть p — простое число, а числа $a_1, \ldots, a_p$ — целые. Докажите, что существует целое число k, такое, что числа $a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots, a_p + pk$ дают не менее $p/2$ различных остатков по модулю p.

Подсчёт и усреднение

1. В лагерь длиной неделю поехало 80 детей. Каждый день половина детей была довольна прошедшим днём, а половина — нет. Ребёнок останется довольным лагерем, если он остался доволен хотя бы половиной дней смены. Какое максимальное количество детей может остаться довольным лагерем?

2. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 128 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по половине признаков.

   (а) Докажите, что в справочнике не больше 128 растений. **(б)** Могло ли в справочнике быть ровно 128 растений?

3. На плоскости проведено 12 прямых, среди которых нет параллельных. Какое максимальное количество равнобедренных треугольников, стороны которых лежат на выбранных прямых, могло оказаться?

4. На доске выписаны в ряд n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geqslant a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство
$$b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Триангуляции

1. Докажите, при $n \geqslant 4$ в любом разрезании выпуклого n-угольника диагоналями на треугольники найдутся два треугольника, две стороны каждого из которых служат сторонами исходного n-угольника *(«уши триангуляции»)*.

2. Каждой триангуляции сопоставим «двойственный» граф, вершинами которого являются треугольники триангуляции, а рёбрами соединены треугольники, имеющие общую сторону. Докажите, что граф является двойственным к некоторой триангуляции тогда и только тогда, когда граф является деревом, степень каждой вершины которого не больше 3.

3. Выпуклый многоугольник разрезан диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в исходном многоугольнике есть две равные стороны.

4. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что никакие две соседние вершины не покрашены в один цвет и все цвета присутствуют. Докажите, что многоугольник можно разрезать диагоналями на треугольники, в каждом из которых все вершины разного цвета.

5. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

6. Выпуклый 2025-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Все треугольники раскрашены в чёрный и в белый цвета так, что любые два треугольника с общей стороной разного цвета. Какое наименьшее количество чёрных треугольников могло получиться?

7. Выпуклый 100-угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями, причём в каждой его вершине сходится нечётное число треугольников. Может ли такое быть?

Круговые шаблоны

1. В однокруговом волейбольном турнире участвовало 11 команд. Могло ли так произойти, что все команды одержали ровно по 5 побед? (В волейболе ничьих нет).

2. **(а)** Докажите, что в полном графе на 7 вершинах можно выделить несколько троек вершин так, что каждое ребро попадёт ровно в одну выделенную тройку.
(б) Докажите, что в полном графе на 13 вершинах можно выбрать несколько четвёрок вершин так, что каждое ребро будет принадлежать ровно одной выбранной четвёрке.

3. В чемпионате по футболу участвуют $n > 1$ команд. Требуется составить расписание игр так,чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день. Докажите, что
(а) если n нечётно, то можно провести чемпионат за n дней;
(б) если n чётно, то можно провести чемпионат за $n - 1$ день.

4. При каких натуральных значениях n все рёбра полного графа на n вершинах можно раскрасить в несколько цветов таким образом, чтобы рёбра каждого цвета образовывали **(а)** путь; **(б)** цикл, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу?

5. В турнире по шведкам участвовали n спортсменов. В каждой игре одна пара участников играла против другой пары. В конце турнира выяснилось, что любые два участника ровно в одной игре оказывались соперниками. При каких натуральных n такое возможно?

Кодирование

1. **(а)** Можно ли с помощью каких-то шести гирь взвесить любое целое число килограммов от 1 до 63, если гири можно ставить только на одну чашу весов?
(б) Пусть мы можем выбрать набор гирь шести различных весов, причём гирек каждого веса ровно 2. Чему равно наибольшее n такое, что с помощью этих гирь можно будет взвесить любое число килограммов от 1 до n, если ставить гири можно только на одну чашу весов?
(в) Можно ли с помощью каких-то четырёх гирь взвесить любое целое число килограммов от 1 до 40, если гири можно ставить на разные чаши весов?

2. Леша загадал одно четное и одно нечетное число от 1 до 10, За какое наименьшее количество вопросов (с вариантами ответов “да” и “нет”) Саше гарантированно получится их узнать?

3. Бабуся из деревни Гусево расследует пропажу своих питомцев. Ей известно, что один из 75 жителей деревни — преступник, еще один — свидетель преступления (но неизвестно, кто есть кто). Каждый день она может позвать в гости любой набор жителей деревни. Если среди гостей будет свидетель преступления, но не будет преступника, свидетель раскроет личность преступника. Хватит ли 12 дней на раскрытие этого дела?

4. За столом сидят 2024 джедая. Любознательный Энакин хочет узнать, как их зовут (у всех джедаев разные имена). Он может показать на несколько джедаев пальцем и попросить магистра Йоду перечислить все их имена. К сожалению, порядок, в котором Йода перечисляет имена, может быть произвольным. Какое наименьшее количество раз Энакину придется отвлечь магистра Йоду от медитации?

5. Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это?

6. **(а)** 64; **(б)** 100 школьников одновременно решили по задаче, все задачи различны. Каждый час школьники пересаживаются и обмениваются решениями с (единственным) соседом. За какое наименьшее число часов все узнают все решения?

7. Фокусник и ассистент показывают фокус. Ассистент даёт в распоряжение зрителя шахматную доску. Зритель может перекрасить некоторые клетки (белые в чёрные и чёрные в белые) и называет ассистенту одну из клеток. После чего ассистент перекрашивает ещё одну клетку. Затем входит фокусник. Он видит только текущее состояние доски и должен назвать клетку, которую загадал зритель. Придумайте алгоритм,позволяющий ассистенту и фокуснику осуществить задуманное.

Кодирование. Добавка

1. Петя выписывает на доску все 2^{100} строк длины 100, состоящих из нулей и единиц, каждую — либо красным, либо синим маркером. Затем Вася выбирает непустой набор позиций и разбивает все строки на пары, в каждой из которых строки отличаются ровно в выбранных позициях. Всегда ли Вася сможет выбрать этот набор позиций таким образом, чтобы среди этих пар количество одноцветных отличалось от количества разноцветных?

2. Хватит ли Бабусе из предыдущего листика 9 дней на раскрытие преступления?

3. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус: зритель сообщает помощнику натуральное число от 1 до 2^{2022}. Помощник выписывает строку длины 4044 из букв А, Б, В. Зритель смотрит на эту строку, выбирает одну из трех букв и стирает все вхождения выбранной буквы из строки. После этого фокусник, глядя на оставшуюся строку должен угадать, какое число загадал зритель. Могут ли фокусник и помощник договориться так, чтобы фокус гарантированно удался?

2 8м2

Подсчёт двумя способами

1. На доске 11×10 (11 строк, 10 столбцов) расставлены фишки. Может ли во всех строках быть разное количество фишек, а во всех столбцах – одинаковое?

2. На доске написано несколько натуральных чисел с суммой 100.

(а) Петя посчитал сколько на доске написано чисел и записал результат. Затем Петя посчитал, сколько чисел, больших 1, было выписано на доску и также записал результат. Потом он посчитал, сколько чисел, больших 2, первоначально было выписано на доске и записал результат. И так далее. Докажите, что сумма выписанных Петей чисел также равна 100.

(б) Вася проделал те же операции, но только с числами Пети. Докажите, что у Васи получился первоначальный набор чисел.

3. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т. е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т. д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

4. Саша начертил квадрат размером 6×6 клеток и поочередно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону).

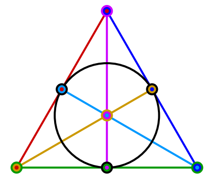
5. По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседних чисел, а каждое синее — полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю.

6. Дано натуральное n. Рёбра полного графа на $4n + 1$ вершине покрашены в 2 цвета так, что из каждой вершины исходит ровно $2n$ красных и $2n$ синих рёбер. Сколько одноцветных треугольников могло оказаться в этом графе?

7. Ровно 19 вершин правильного 97-угольника покрашено в белый цвет, остальные вершины покрашены в чёрный. Докажите, что число равнобедренных одноцветных треугольников с вершинами в вершинах 97-угольника не зависит от способа раскраски.

Усреднение

1. В 7 вершинах расставлены числа. Известно, что сумма любых трех, лежащих на одной прямой или на отмеченной окружности, положительна. Может ли сумма всех чисел быть отрицательна?



2. Резиденты детского сада в последний месяц пристрастились к поеданию шоколадных батончиков Twix. Батончик Twix состоит из двух шоколадных палочек. По правилам поедания Twix одну палочку нужно съесть самому, а вторую скормить другому ребёнку. За месяц силами 30 детсадовцев было уничтожено 900 Twix'ов. Докажите, что можно выделить подгруппу из 6 детей, внутри которой было съедено не менее 32 Twix'ов.

3. Взяли две одинаковые шестерёнки с 60 зубьями, и у первой спилили 30 зубьев, а у второй — 40. Докажите, что шестерёнки можно наложить одну на другую так, что совпадут не менее 10 уцелевших зубьев. Является ли оценка точной?

4. Клетчатая доска 20×20 разрезана на фигурки T-тетрамино. Докажите, что можно разрезать доску по клеткам на две части прямолинейным разрезом так, чтобы повредить не более
(а) 7 **(б)** 6 тетраминошек.

5. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале.

6. Докажите, что для любого натурального $n > 3$ существует полный ориентированный граф на n вершинах, в котором больше $\frac{n!}{2^{n-1}}$ путей, проходящих через каждую вершину ровно 1 раз.

7. Пусть p — простое число, а числа $a_1, \ldots, a_p$ — целые. Докажите, что существует целое число k, такое, что числа $a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots, a_p + pk$ дают не менее $p/2$ различных остатков по модулю p.

Подсчёт и усреднение

1. В лагерь длиной неделю поехало 80 детей. Каждый день половина детей была довольна прошедшим днём, а половина — нет. Ребёнок останется довольным лагерем, если он остался доволен хотя бы половиной дней смены. Какое максимальное количество детей может остаться довольным лагерем?

2. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 128 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по половине признаков.

(а) Докажите, что в справочнике не больше 128 растений. **(б)** Могло ли в справочнике быть ровно 128 растений?

3. На плоскости проведено 12 прямых, среди которых нет параллельных. Какое максимальное количество равнобедренных треугольников, стороны которых лежат на выбранных прямых, могло оказаться?

4. На доске выписаны в ряд n положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geqslant a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Триангуляции

1. Докажите, при $n \geqslant 4$ в любом разрезании выпуклого n-угольника диагоналями на треугольники найдутся два треугольника, две стороны каждого из которых служат сторонами исходного n-угольника *(«уши триангуляции»)*.

2. Каждой триангуляции сопоставим «двойственный» граф, вершинами которого являются треугольники триангуляции, а рёбрами соединены треугольники, имеющие общую сторону. Докажите, что граф является двойственным к некоторой триангуляции тогда и только тогда, когда граф является деревом, степень каждой вершины которого не больше 3.

3. Выпуклый многоугольник разрезан диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в исходном многоугольнике есть две равные стороны.

4. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что никакие две соседние вершины не покрашены в один цвет и все цвета присутствуют. Докажите, что многоугольник можно разрезать диагоналями на треугольники, в каждом из которых все вершины разного цвета.

5. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

6. Выпуклый 2025-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Все треугольники раскрашены в чёрный и в белый цвета так, что любые два треугольника с общей стороной разного цвета. Какое наименьшее количество чёрных треугольников могло получиться?

7. Выпуклый 100-угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями, причём в каждой его вершине сходится нечётное число треугольников. Может ли такое быть?

Круговые шаблоны

1. В однокруговом волейбольном турнире участвовало 11 команд. Могло ли так произойти, что все команды одержали ровно по 5 побед? (В волейболе ничьих нет).

2. **(а)** Докажите, что в полном графе на 7 вершинах можно выделить несколько троек вершин так, что каждое ребро попадёт ровно в одну выделенную тройку.
(б) Докажите, что в полном графе на 13 вершинах можно выбрать несколько четвёрок вершин так, что каждое ребро будет принадлежать ровно одной выбранной четвёрке.

3. В чемпионате по футболу участвуют $n > 1$ команд. Требуется составить расписание игр так,чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день. Докажите, что
(а) если n нечётно, то можно провести чемпионат за n дней;
(б) если n чётно, то можно провести чемпионат за $n-1$ день.

4. При каких натуральных значениях n все рёбра полного графа на n вершинах можно раскрасить в несколько цветов таким образом, чтобы рёбра каждого цвета образовывали **(а)** путь; **(б)** цикл, проходящий по всем вершинам ровно по одному разу?

5. В турнире по шведкам участвовали n спортсменов. В каждой игре одна пара участников играла против другой пары. В конце турнира выяснилось, что любые два участника ровно в одной игре оказывались соперниками. При каких натуральных n такое возможно?

Кодирование

1. **(а)** Можно ли с помощью каких-то шести гирь взвесить любое целое число килограммов от 1 до 63, если гири можно ставить только на одну чашу весов?
(б) Пусть мы можем выбрать набор гирь шести различных весов, причём гирек каждого веса ровно 2. Чему равно наибольшее n такое, что с помощью этих гирь можно будет взвесить любое число килограммов от 1 до n, если ставить гири можно только на одну чашу весов?
(в) Можно ли с помощью каких-то четырёх гирь взвесить любое целое число килограммов от 1 до 40, если гири можно ставить на разные чаши весов?

2. Леша загадал одно четное и одно нечетное число от 1 до 10, За какое наименьшее количество вопросов (с вариантами ответов “да” и “нет”) Саше гарантированно получится их узнать?

3. Бабуся из деревни Гусево расследует пропажу своих питомцев. Ей известно, что один из 75 жителей деревни — преступник, еще один — свидетель преступления (но неизвестно, кто есть кто). Каждый день она может позвать в гости любой набор жителей деревни. Если среди гостей будет свидетель преступления, но не будет преступника, свидетель раскроет личность преступника. Хватит ли 12 дней на раскрытие этого дела?

4. За столом сидят 2024 джедая. Любознательный Энакин хочет узнать, как их зовут (у всех джедаев разные имена). Он может показать на несколько джедаев пальцем и попросить магистра Йоду перечислить все их имена. К сожалению, порядок, в котором Йода перечисляет имена, может быть произвольным. Какое наименьшее количество раз Энакину придется отвлечь магистра Йоду от медитации?

5. Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это?

6. **(а)** 64; **(б)** 100 школьников одновременно решили по задаче, все задачи различны. Каждый час школьники пересаживаются и обмениваются решениями с (единственным) соседом. За какое наименьшее число часов все узнают все решения?

7. Фокусник и ассистент показывают фокус. Ассистент даёт в распоряжение зрителя шахматную доску. Зритель может перекрасить некоторые клетки (белые в чёрные и чёрные в белые) и называет ассистенту одну из клеток. После чего ассистент перекрашивает ещё одну клетку. Затем входит фокусник. Он видит только текущее состояние доски и должен назвать клетку, которую загадал зритель. Придумайте алгоритм,позволяющий ассистенту и фокуснику осуществить задуманное.