# Теория и ключевые задачи группы 8-2

## Теория

### Алгебра

1. Формула Лежандра. Мультиномиальный коэффициент — целое число. Листик, разбор.
2. Транснеравенство. Листик, разбор.
3. Сумма арифметико-геометрической последовательности. Листик, разбор.
4. Функция Эйлера. Определение, мультипликативность, формула. Листик, разбор.
5. Теорема Эйлера. Листик, разбор.
6. Метод Штурма. Доказательство неравенств о средних с помощью метода Штурма. Листик, разбор 1, разбор 2, разбор 3, разбор 4.
7. Неравенство о средних. Доказательство без метода Штурма. Листик, разбор.

### Геометрия

1. Теорема о вписанном угле, выражение углов между хордами через меры высекаемых ими на окружности дуг. Листик, разбор 1, разбор 2.
2. Два критерия вписанности четырёхугольника. Листик, разбор.
3. Лемма об угле между хордой и касательной, критерий касания окружностей в терминах общей касательной. Листик.
4. Отношение площадей с равными основаниями/высотами. Теорема Фалеса. Доказательство с помощью площадей, обратное утверждение. Листик 1, Листик 2, Листик 3, разбор.
5. Лемма об отражении ортоцентра. Листик,
6. Лемма о трезубце. Внешняя лемма о трезубце. Листик,
7. Степень точки. Два определения, их эквивалентность, метрический критерий вписанности. Листик,

### Комбинаторика

1. Раскраски графов. Если граф нельзя правильно покрасить в $d$ цветов, то в нём есть подграф, все степени которого не меньше $d$. Листик, разбор.
2. Ориентированные графы. Компоненты сильной связности. Граф компонент сильной связности. Листик, разбор 1, разбор 2, разбор 3.
3. Планарные графы. Формула Эйлера. Неравенство $E \leqslant 3V - 6$ для связного планарного графа. Листик, разбор.
4. Триангуляция выпуклого многоугольника. У любой триангуляции есть два уха. Двойственный граф триангуляции и его свойства. Листик.

## Задачи

### Алгебра

1. Даны натуральные числа $a$ и $b$. Выяснилось, что число $a^7 + b^7 + b$ делится на $ab$. Докажите, что $b$ является седьмой степенью некоторого натурального числа. Листик, разбор.
2. **Неравенство Несбитта.** Даны положительные числа $a, b, c$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Листик, разбор.

**3.** Найдите сумму
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2022\cdot 2024}.$$
Листик, разбор.

**4.** Найдите сумму
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$
Листик, разбор.

**5.** Дано натуральное число $n$. Докажите, что
$$\sum_{d\,|\,n}\varphi(d)=n.$$
Суммирование ведётся по всем делителям $d$ числа $n$. Листик, разбор.

**6.** Докажите, что к числу $2^{100}$ можно приписать слева несколько цифр так, чтобы снова получилась степень двойки. Листик, разбор.

**7.** Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенству $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Докажите неравенство
$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)}\geqslant\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$
Листик, разбор.

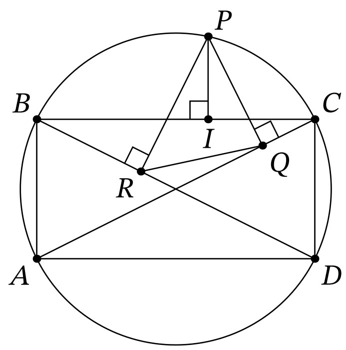
**8.** Ваня вступил в Клуб Любителей Алгебры и на очередном мероприятии записал на доску квадратный трёхчлен $x^2+1111x+2222$, после чего участники клуба друг за другом меняли на единицу либо свободный член, либо коэффициент при $x$. В результате на доске оказался трёхчлен $x^2+2222x+1111$. Правда ли, что в какой-то момент на доске обязательно оказался трёхчлен с целыми корнями? Листик, разбор.

**9.** У Вадима на столе лежат 100 карандашей семи цветов. Пара карандашей называется *красивой*, если эти карандаши разных цветов. Найдите наибольшее возможное число красивых пар. Листик, разбор.

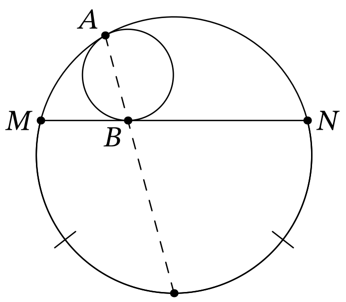
**10.** Миша задумал натуральное число $n$. Маша выписывает на доску строго возрастающую последовательность натуральных чисел такую, что $a_{k+1}\leqslant 2k$ при любом $k\geqslant 1$. Докажите, что найдутся два члена этой последовательности, которые отличаются ровно на $n$. Листик, разбор.

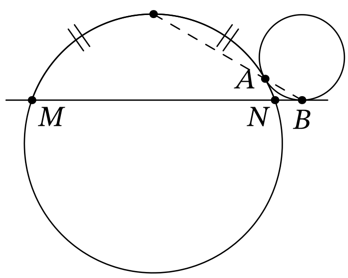
## Геометрия

**1.** Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность. Из произвольной точки $P$ «малой» дуги $\overset{\frown}{AB}$ опущены перпендикуляры $PI$, $PQ$, $PR$ на $AB$, $AC$, $BD$ соответственно. Докажите, что $I$ — центр вписанной окружности треугольника $PQR$. Листик, разбор.

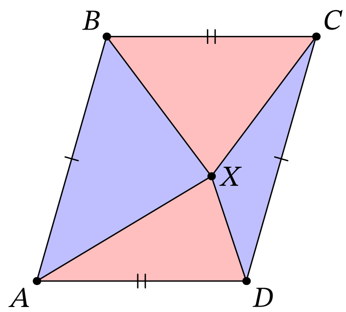



**2.** **Лемма Архимеда.** Окружность $\omega$ касается хорды $MN$ окружности $\Omega$ в точке $B$, а окружности $\Omega$ в точке $A$. Докажите, что $AB$ является биссектрисой угла $MAN$. Листик, разбор.

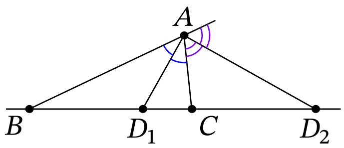


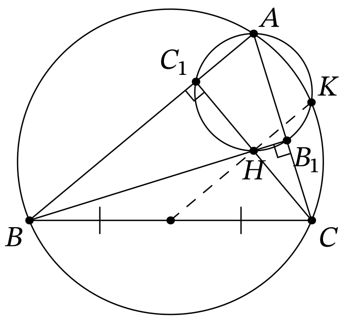
**3.** Точка $X$ лежит внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{DAX}$. Листик, разбор.



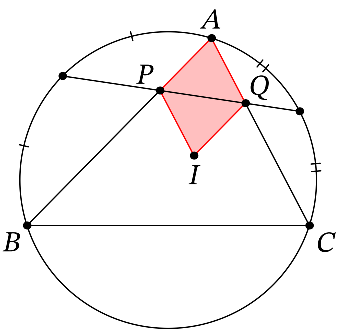

**4.** **Основное свойство биссектрисы.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $BD$ **(a)** внутреннего **(b)** внешнего угла. Докажите, что $AD : DC = AB : BC$. Листик.



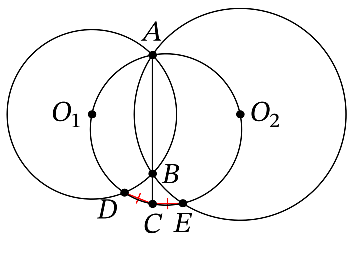

**5.** Высоты $BB_1$ и $CC_1$ остроугольного неравнобедренного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Описанная окружность треугольника $AB_1C_1$ пересекает описанную окружность треугольника $ABC$ вторично в точке $K$. Докажите, что прямая $KH$ делит отрезок $BC$ пополам. Листик.



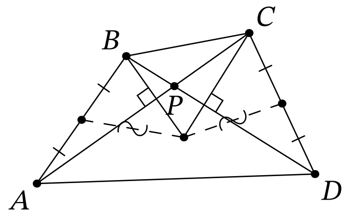

**6.** Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг $AB$ и $AC$ описанной окружности треугольника $ABC$, пересекает стороны $AB$ и $AC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$. Листик.



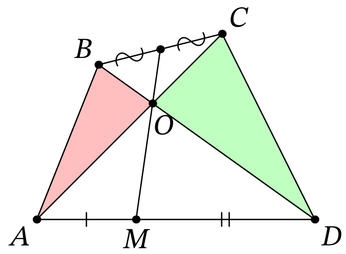

**7.** Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ с центрами в точках $O_1$ и $O_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Окружность, проходящая через точки $O_1$, $O_2$ и $A$, повторно пересекает окружность $\omega_1$ в точке $D$, окружность $\omega_2$ — в точке $E$, а прямую $AB$ — в точке $C$. Докажите, что $CD = CE$. Листик.



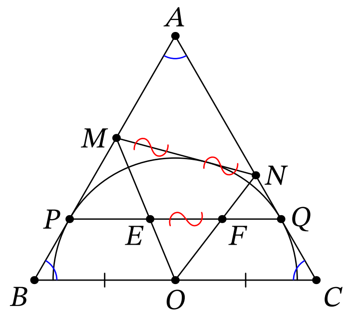

**8.** Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$. Пусть $P$ –– точка пересечения его диагоналей. Докажите, что ортоцентр треугольника $BPC$ равноудалён от середин отрезков $AB$ и $CD$. Листик.




9. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Прямая, проходящая через точку $O$ и середину стороны $BC$, пересекает сторону $AD$ точке $M$. Докажите, что $AM : MD = S_{ABO} : S_{CDO}$. Листик.




10. Окружность с центром $O$ на стороне $BC$ равностороннего треугольника $ABC$ касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Касательная к окружности пересекает эти стороны в точках $M$ и $N$, а отрезки $OM$ и $ON$ пересекают отрезок $PQ$ в точках $E$ и $F$. Докажите, что $EF = MN/2$. Листик.




**Комбинаторика**

1. В графе 1000 вершин, причём степень каждой не больше 9. Докажите, что можно выбрать такой подграф на 200 вершинах, что в нём не будет нечётных циклов. Листик, разбор.

2. Назовём вершину *самой сильной*, если расстояние от неё до любой другой не превосходит двух.
**(а)** Докажите, что любом полном ориентированном графе есть самая сильная вершина.
**(б)** Докажите, что если в полном ориентированном графе есть ровно одна самая сильная вершина, то из неё ведут стрелки во все другие вершины. Листик, разбор.

3. Карта материка разделена на страны по некоторым линиям (можно считать, ломаным). Каждая страна представлена одним связным куском. Докажите, что можно составить 6 альянсов из этих стран так, чтобы страны из одного альянса не являлись соседями. Листик, разбор.

4. $N$ окружностей на плоскости таковы, что любые две из них пересекаются по двум точкам и никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей они делят плоскость? Листик, разбор.

5. На плоскости даны $n > 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.
**(а)** Докажите, что можно выбрать две из них так, что отрезок, их соединяющий, виден из любой другой отмеченной точки под острым углом.
**(б)** Докажите, что существует окружность, проходящая через какие-то три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек. Листик, разбор.

6. По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседних чисел, а каждое синее — полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю. Листик.

7.

8. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс,

переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале. Листик.

**9.** Выпуклый многоугольник разрезан диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в исходном многоугольнике есть две равные стороны. Листик.

**10.** В чемпионате по футболу участвуют $n > 1$ команд. Требуется составить расписание игр так,чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день. Докажите, что

**(а)** если $n$ нечётно, то можно провести чемпионат за $n$ дней;

**(б)** если $n$ чётно, то можно провести чемпионат за $n - 1$ день. Листик.

**11.** Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это? Листик.