Теория и ключевые задачи группы 8-1

Теория

Алгебра

1. Формула Лежандра. Мультиномиальный коэффициент — целое число. Листик, разбор 1, разбор 2.
2. Транснеравенство. Листик, разбор 1, разбор 2, разбор 3.
3. Сумма последовательности $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где $x_1 = a$, $x_{k+1} = qx_k + d$ (выразить через a, q, d). Листик, разбор.
4. Функция Эйлера. Определение, мультипликативность, формула. Листик, разбор.
5. Теорема Эйлера. Листик, разбор 1, разбор 2.
6. Метод Штурма. Доказательство неравенств о средних. Листик, разбор 1, разбор 2, разбор 3, разбор 4.
7. Неравенство о средних. Два доказательства без метода Штурма. Листик, разбор.

Геометрия

1. Теорема о вписанном угле, выражение углов между хордами через меры высекаемых ими на окружности дуг. Листик, разбор 1, разбор 2.
2. Два критерия вписанности четырёхугольника. Листик, разбор.
3. Лемма об угле между хордой и касательной, критерий касания окружностей в терминах общей касательной. Листик.
4. Отношение площадей с равными основаниями/высотами. Теорема Фалеса. Доказательство с помощью площадей, обратное утверждение. Листик 1, Листик 2, Листик 3, разбор.
5. Лемма об отражении ортоцентра. Листик.
6. Лемма о трезубце. Внешняя лемма о трезубце. Листик.
7. Степень точки. Два определения, их эквивалентность, метрический критерий вписанности. Листик.

Комбинаторика

1. Раскраски графов. Если граф нельзя правильно покрасить в d цветов, то в нём есть подграф, все степени которого не меньше d. Листик, разбор.
2. Ориентированные графы. Компоненты сильной связности. Граф компонент сильной связности. Листик, разбор 1, разбор 2.
3. Планарные графы. Формула Эйлера. Неравенство $E \leqslant 3V - 6$ для связного планарного графа. Листик, разбор 1, разбор 2.
4. Триангуляция выпуклого многоугольника. У любой триангуляции есть два уха. Двойственный граф триангуляции и его свойства. Листик.

Задачи

Алгебра

1. Решите в натуральных числах уравнение $(n+1)(2n+1) = 10m^2$. Листик, разбор.
2. По n коробкам как-то разложены n^2 конфет. За один ход можно взять две коробки, содержащие суммарно чётное число конфет, и разложить эти конфеты поровну в эти коробки. При каких натуральных n за несколько ходов заведомо можно разложить конфеты поровну по всем n коробкам? Листик, разбор.
3. **Неравенство Чебышёва.** Даны два набора вещественных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Докажите неравенство
$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$
Листик, разбор.

4. Найдите сумму

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2022\cdot 2024}.$$

Листик, разбор.

5. Дано натуральное число n. Докажите, что

$$\sum_{d\,|\,n}\varphi(d)=n.$$

Суммирование ведётся по всем делителям d числа n. Листик, разбор.

6. Дано натуральное $n>3$. Докажите, что $n^{n^{n^n}}-n^{n^n}$ делится на 1989. Листик, разбор.

7. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенству $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Докажите неравенство

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)}\geqslant\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

Листик, разбор.

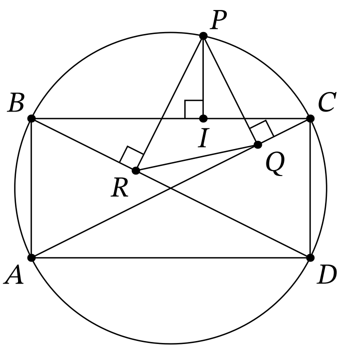
8. Ваня выписал на доску числа $2^0, 2^1, \ldots, 2^{2024}$. Вадим хочет разбить эти числа на две группы с суммами p и q так, чтобы квадратный трёхчлен x^2-px+q имел целый корень. Сколькими способами он может это сделать? Листик, разбор.

9. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшей будет площадь правильного n-угольника. Листик, разбор 1, разбор 2.

10. Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geqslant ab+bc+ca$. Листик, разбор.

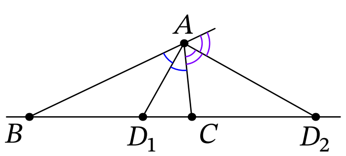
Геометрия

1. Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность. Из произвольной точки P «малой» дуги $\overset{\frown}{AB}$ опущены перпендикуляры PI, PQ, PR на AB, AC, BD соответственно. Докажите, что I — центр вписанной окружности треугольника PQR. Листик, разбор.

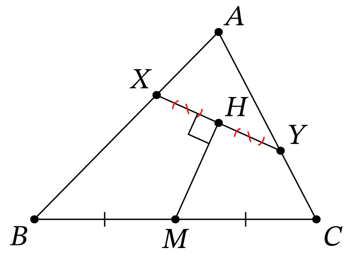


2. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается хорды MN окружности Ω в точке B, а окружности Ω в точке A. Докажите, что AB является биссектрисой угла MAN. Листик, разбор.

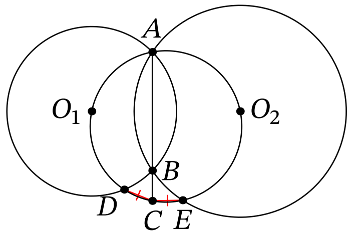
3. **Основное свойство биссектрисы.** В треугольнике ABC проведена биссектриса BD **(a)** внутреннего **(b)** внешнего угла. Докажите, что $AD : DC = AB : BC$. Листик, разбор.



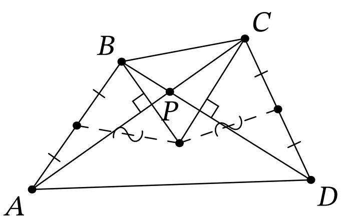
4. В остроугольном треугольнике ABC отмечен ортоцентр H и середина M стороны BC. Прямая, проходящая через H и перпендикулярная MH, пересекает стороны AB, AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что точка H — середина отрезка XY. Листик.



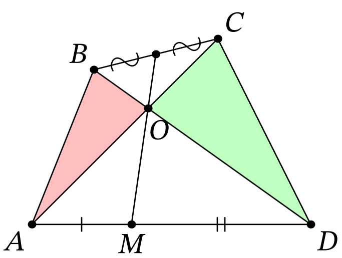
5. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, повторно пересекает окружность ω_1 в точке D, окружность ω_2 — в точке E, а прямую AB — в точке C. Докажите, что $CD = CE$. Листик.



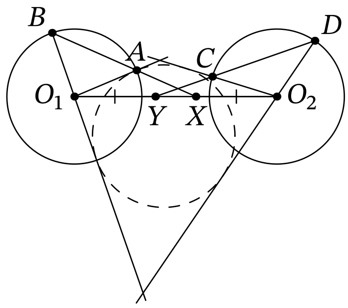
6. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$. Пусть P –– точка пересечения его диагоналей. Докажите, что ортоцентр треугольника BPC равноудалён от середин отрезков AB и CD. Листик.



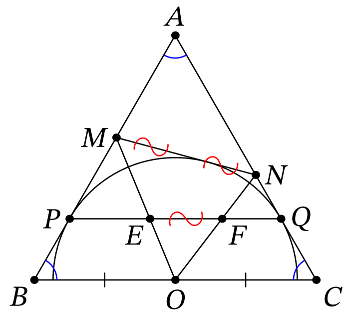
7. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Прямая, проходящая через точку O и середину стороны BC, пересекает сторону AD точке M. Докажите, что $AM : MD = S_{ABO} : S_{CDO}$. Листик, разбор.



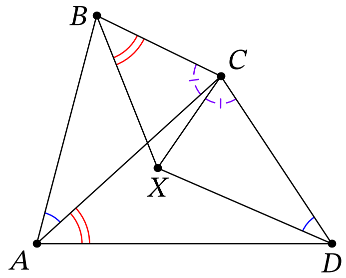
8. **Лемма о Чебурашке**. Даны две равные окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2. На отрезке O_1O_2 взяты точки X и Y так, что $O_1X = O_2Y$. Точки A и B лежат на ω_1 и прямая AB проходит через X. Точки C и D лежат на ω_2 и прямая CD проходит через Y. Докажите, что существует окружность, которая касается прямых AO_1, BO_1, CO_2, DO_2. Листик.



9. Окружность с центром O на стороне BC равностороннего треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Касательная к окружности пересекает эти стороны в точках M и N, а отрезки OM и ON пересекают отрезок PQ в точках E и F. Докажите, что $EF = MN/2$. Листик.



10. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена такая точка X, что $\angle BAC = \angle CDX$, $\angle DAC = \angle CBX$. Докажите, что $\angle BCA = \angle XCD$. Листик.



Комбинаторика

1. В графе 1000 вершин, причём степень каждой не больше 9. Докажите, что можно выбрать такой подграф на 200 вершинах, что в нём не будет нечётных циклов. Листик, разбор.

2. Назовём вершину *самой сильной*, если расстояние от неё до любой другой не превосходит двух.
(а) Докажите, что любом полном ориентированном графе есть самая сильная вершина.
(б) Докажите, что если в полном ориентированном графе есть ровно одна самая сильная вершина, то из неё ведут стрелки во все другие вершины. Листик, разбор.

3. Дан полный сильно связный граф на $n > 3$ вершинах. Докажите, что найдется вершина, при удалении которой граф остаётся сильно связным. Листик, разбор.

4. Карта материка разделена на страны по некоторым линиям (можно считать, ломаным). Каждая страна представлена одним связным куском. Докажите, что можно составить 6 альянсов из этих стран так, чтобы страны из одного альянса не являлись соседями. Листик, разбор.

5. На плоскости даны $n > 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.
(а) Докажите, что можно выбрать две из них так, что отрезок, их соединяющий, виден из любой другой отмеченной точки под острым углом.
(б) Докажите, что существует окружность, проходящая через какие-то три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек. Листик, разбор 1, разбор 2.

6. По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседних чисел, а каждое синее — полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю. Листик.

7. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале. Листик.

8. Выпуклый многоугольник разрезан диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в исходном многоугольнике есть две равные стороны. Листик.

9. В чемпионате по футболу участвуют $n > 1$ команд. Требуется составить расписание игр так,чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день. Докажите, что
(а) если n нечётно, то можно провести чемпионат за n дней;
(б) если n чётно, то можно провести чемпионат за $n - 1$ день. Листик.

10. Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это? Листик.