А. А. Соколов, М. Д. Губина, М. А. Ложкин,
Е. А. Лычагина, И. Н. Михайлов, В. И. Ретинский

Программа зачёта кружка в ЦПМ, 8-1, 2024-2025

Версия от 10.05.2025 г.

Почти ко всем вопросам прикреплена ссылка на листик, в рамках которого этот вопрос разбирался. Но что-то разбиралось на программе в Сириусе, к этим вопросам прикреплена ссылка на другие источники.

Во всех теоретических вопросах нужно знать не только формулировку, но и доказательство. Все задачи были выданы и разобраны на занятиях кружка.

Теория

Алгебра

1. Свойства степени вхождения простого. Формула Лежандра. Мультиномиальный коэффициент — целое число. Листик, разбор 1, разбор 2.
2. Транснеравенство. Доказательство. Примеры применения. Листик, разбор 1, разбор 2, разбор 3.
3. Формула для суммы последовательности, заданной соотношениями $x_1 = a$, $x_{k+1} = qx_k + d$. Листик, разбор.
4. Функция Эйлера. Определение, мультипликативность, формула. Листик, разбор.
5. Теорема Эйлера. Доказательство. Листик, разбор 1, разбор 2.
6. Метод Штурма. Доказательство неравенств о средних с помощью метода Штурма. Листик, разбор 1, разбор 2, разбор 3, разбор 4.
7. Неравенство о средних. Два доказательства без использования метода Штурма. Листик, разбор.
8. Десятичная запись дробей. Рациональная дробь, записанная в любой системе счисления, периодична. Когда десятичная запись дроби конечна? Листик, разбор.
9. Многочлены. Деление с остатком. Теорема Безу. Многочлен степени n имеет не более n корней. Листик, разбор 1, разбор 2.

Геометрия

1. Теорема о вписанном угле, выражение углов между хордами через меры дуг, высекаемых ими на окружности. Листик, разбор 1, разбор 2.
2. Касательная к окружности. Теорема об угле между касательной и хордой. Лемма Архимеда. Листик, разбор.
3. Лемма об отражении ортоцентра. Листик.
4. Лемма о трезубце. Внешняя лемма о трезубце. Листик.

5. Степень точки. Два определения, их эквивалентность, метрический критерий вписанности. Листик.

6. Формулировка теоремы Менелая. Основания внешних биссектрис неравнобедренного треугольника лежат на одной прямой. Листик, разбор 1, разбор 2.

7. Формулировка теоремы Чевы. Доказательство существования точек Жергонна и Нагеля. Листик, разбор.

8. Прямые AB и PQ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $PA^2 - PB^2 = QA^2 - QB^2$. Теорема Карно. Листик, разбор.

Комбинаторика

1. Раскраски графов. Если граф нельзя правильно покрасить в d цветов, то в нём есть подграф, все степени которого не меньше d. Листик, разбор.

2. Ориентированные графы. Компоненты сильной связности. Граф компонент сильной связности. Листик, разбор 1, разбор 2.

3. Планарные графы. Формула Эйлера. Неравенство $E \leqslant 3V - 6$ для связного планарного графа. Листик, разбор 1, разбор 2.

4. Триангуляция выпуклого многоугольника. У любой триангуляции есть два уха. Двойственный граф триангуляции и его свойства. Листик.

5. Перестановки. Представление перестановки в виде ориентированного графа. Разбиение перестановки на циклы. Листик.

6. Формула включений-исключений для n множеств. Оценки, получаемые из формулы включений-исключений выбрасыванием последних k слагаемых. Листик, разбор.

7. Числа Каталана. Правильные скобочные последовательности. Явная и рекуррентная формулы. Листик, разбор 1, разбор 2.

Задачи

Алгебра

1. Решите в натуральных числах уравнение $(n+1)(2n+1) = 10m^2$. Листик, разбор.

2. **Неравенство Чебышёва.** Даны два набора вещественных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

   Листик, разбор.

3. Найдите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{2022 \cdot 2024}.$$

   Листик, разбор.

4. Дано натуральное число n. Докажите, что

$$\sum_{d\,|\,n} \varphi(d) = n.$$

Суммирование ведётся по всем делителям d числа n. Листик, разбор.

5. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенству $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \geqslant \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

Листик, разбор.

6. Ваня вступил в Клуб Любителей Алгебры и на очередном мероприятии записал на доску квадратный трёхчлен $x^2 + 1111x + 2222$, после чего участники клуба друг за другом меняли на единицу либо свободный член, либо коэффициент при x. В результате на доске оказался трёхчлен $x^2 + 2222x + 1111$. Правда ли, что в какой-то момент на доске обязательно оказался трёхчлен с целыми корнями? Листик, разбор.

7. Про ненулевые вещественные числа a, b, c известно, что $5a + 4b + 5c = 0$. Докажите, что у квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ есть корень на отрезке $[0, 2]$. Листик, разбор.

8. Даны положительные числа a, b, c. Докажите, что

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c} \geqslant 2.$$

Листик, разбор.

9. По кругу расставлены 2025^{2025} натуральных чисел. Для любых двух соседних чисел Артемий записал себе в тетрадку их НОК. Могло ли оказаться так, что все 2025^{2025} чисел в тетрадке Артемия являются последовательными натуральными числами (идущими в некотором порядке)? Листик, разбор.

10. Найдите первые 100 знаков после запятой числа $(6 + \sqrt{35})^{2025}$. Листик, разбор.

11. Для натурального n докажите неравенство

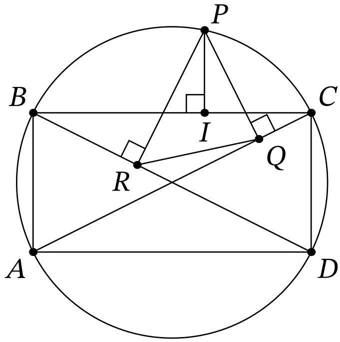
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Листик, разбор.

12. Вадим задумал многочлен $P(x)$, все коэффициенты которого являются целыми неотрицательными числами. Артемий может назвать любое натуральное число k и спросить у Вадима, чему равно значение $P(k)$. За какое наименьшее число вопросов Артемий сможет гарантированно узнать все коэффициенты многочлена P? Листик, разбор.

Геометрия

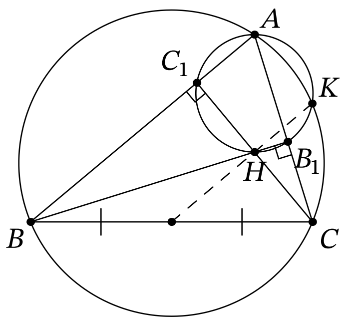
1. Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность. Из произвольной точки P «малой» дуги BC опущены перпендикуляры PI, PQ, PR на BC, AC, BD соответственно. Докажите, что I — центр вписанной окружности треугольника PQR. Листик, разбор 1, разбор 2.



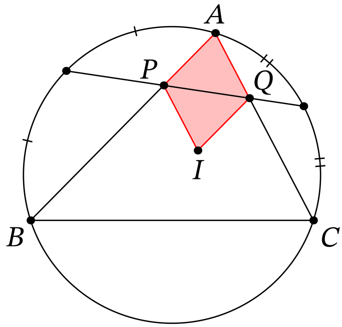
2. На плоскости даны $n > 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.
(а) Докажите, что можно выбрать две из них так, что отрезок, их соединяющий, виден из любой другой отмеченной точки под острым углом.
(б) Докажите, что существует окружность, проходящая через какие-то три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек. Листик, разбор 1, разбор 2.

3. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD. Листик, разбор.

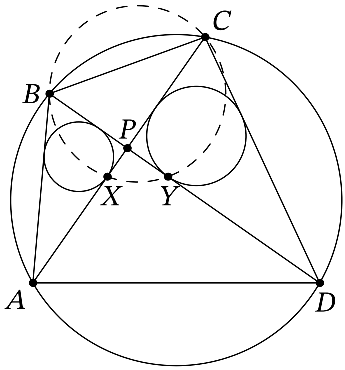
4. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам. Листик, разбор.



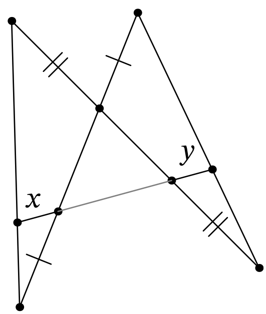
5. Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Листик, разбор.



6. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Окружности, вписанные в треугольники ABP и CDP, касаются сторон AP и DP в точках X и Y соответственно. Докажите, что точки X, Y, B и C лежат на одной окружности. Листик, разбор.

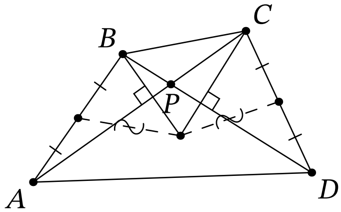


7. Посмотрите на картинку. Докажите, что $x = y$. Листик, разбор.

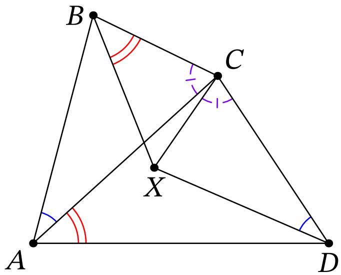


8. Внутри квадрата расположены три окружности, каждая из которых касается внешним образом двух других, а также касается двух сторон квадрата. Докажите, что радиусы двух из данных окружностей одинаковы. Листик, разбор.

9. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$. Пусть P — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что ортоцентр треугольника BPC равноудалён от середин отрезков AB и CD. Листик, разбор.



10. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена такая точка X, что $\angle BAC = \angle CDX$, $\angle DAC = \angle CBX$. Докажите, что $\angle BCA = \angle XCD$. Листик, разбор.



Комбинаторика

1. В графе 1000 вершин, причём степень каждой не больше 9. Докажите, что можно выбрать такой подграф на 200 вершинах, что в нём не будет нечётных циклов. Листик, разбор.

2. Назовём вершину *самой сильной*, если расстояние от неё до любой другой не превосходит двух.

(а) Докажите, что любом полном ориентированном графе есть самая сильная вершина.

(б) Докажите, что если в полном ориентированном графе есть ровно одна самая сильная вершина, то из неё ведут стрелки во все другие вершины. Листик, разбор.

3. Дан полный сильно связный граф на $n > 3$ вершинах. Докажите, что найдется вершина, при удалении которой граф остаётся сильно связным. Листик, разбор.

4. Карта материка разделена на страны по некоторым линиям (можно считать, ломаным). Каждая страна представлена одним связным куском. Докажите, что можно составить 6 альянсов из этих стран так, чтобы страны из одного альянса не являлись соседями. Листик, разбор.

5. По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседних чисел, а каждое синее — полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю. Листик.

6. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одного веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале. Листик.

7. Выпуклый многоугольник разрезан диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в исходном многоугольнике есть две равные стороны. Листик.

8. В чемпионате по футболу участвуют $n > 1$ команд. Требуется составить расписание игр так,чтобы каждая команда сыграла с каждой и чтобы никакой команде не пришлось играть две игры за день. Докажите, что

(а) если n нечётно, то можно провести чемпионат за n дней;

(б) если n чётно, то можно провести чемпионат за $n - 1$ день. Листик.

9. Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это? Листик.

10. У Маши есть колода из 104 карточек, пронумерованных числами от 1 до 104, и любимый способ её тасовать. Однажды Маша взяла колоду, в которой карточки были выложены по возрастанию, и перетасовала её. Потом она решила, что этого недостаточно, и перетасовала колоду ещё раз (точно таким же способом). Могло ли так случиться, что в результате этого нижняя карта оказалась самой верхней, а порядок остальных 103 карт не изменился? Листик, разбор.

11. Найдите количество таблиц $2 \times n$, в которые вписаны числа от 1 до $2n$ каждое по одному разу, и в каждой вертикали и горизонтали которых числа возрастают. Листик, разбор.

12. Сколькими способами можно разрезать выпуклый n-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники? Разрезания, отличающиеся поворотом, считаются различными. Листик, разбор.