Диагностическая работа

Задача 1. Вещественные числа x и y таковы, что

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1.$$

Чему может равняться значение $x+y$?

Решение. Из данного равенства следует, что

$$x+\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}=\frac{y-\sqrt{1+y^2}}{(y+\sqrt{1+y^2})(y-\sqrt{1+y^2})}=-y+\sqrt{1+y^2}$$

Аналогично получаем, что

$$y+\sqrt{1+y^2}=-x+\sqrt{1+x^2}$$

Складывая полученные два равенства получим, что

$$x+y+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=-x-y+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2},$$

откуда следует, что $x+y=0$. □

Критерии

1 б. Показано, что при $x+y=0$ выполнено равенство из условия.

4 б. Доказано, что $x^2=y^2$.

Задача 2. В классе учится 30 учеников, один из них — Ваня. У каждого из Ваниных одноклассников есть ровно 5 общих друзей с Ваней. Докажите, что в классе есть ученик с нечётным числом друзей.

Решение. Предположим, что условие не выполнено, то есть у каждого ученика в классе чётное количество друзей.

Разделим всех детей, кроме Вани, на две группы: в группе A будут находиться его друзья, в группе B будут находиться все остальные. Тогда в группе A находится чётное количество людей, а в группе B — нечётное.

В сделанном предположении каждый человек из группы B дружит с 5 людьми из группы A, и поэтому должен дружить с нечётным количеством людей из группы B. Получается, что в группе B нечётное количество человек, у каждого из которых нечётное количество друзей в группе B. Получаем противоречие с леммой о рукопожатиях. □

Задача 3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC=\angle BCD=\varphi<90°$. Точка X внутри четырёхугольника $ABCD$ такова, что $\angle XAD=\angle XDA=90°-\varphi$. Докажите, что $BX=XC$.

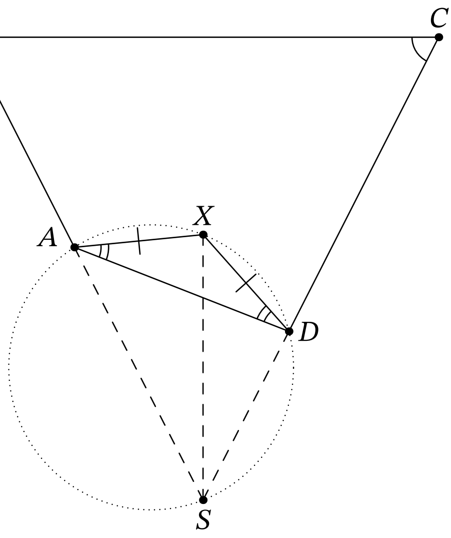

Рис. 1: К решению задачи 3

Решение. Продлим AB и CD до пересечения в точке S. Заметим, что $\angle BSC = 180^\circ = 2\varphi$, а $\angle AXD = 180^\circ - 2(90^\circ - \varphi)$, откуда следует, что четырехугольник $AXDS$ вписанный. Поскольку $AX = XD$, то SX — биссектриса угла ASD. Треугольник BSC равнобедренный, поэтому SX является серединным перпендикуляром к отрезку BC, а значит $BX = XC$.

□

Критерии

3 б. Доказано, что четырёхугольник $AXDS$ — вписанный.

Задача 4. Докажите, что если m и $n < m$ — натуральные числа, то

$$\text{НОД}(m, n) + \text{НОД}(m+1, n+1) + \text{НОД}(m+2, n+2) \leqslant 2m - 2n + 1.$$

Здесь $\text{НОД}(x, y)$ обозначает наибольший общий делитель чисел x и y.

Решение. Известно, что для любых натуральных чисел y и $x > y$ верно равенство $\text{НОД}(x, y) = \text{НОД}(x, x - y)$. Поэтому неравенство можно переписать в виде

$$\text{НОД}(m, m-n) + \text{НОД}(m+1, m-n) + \text{НОД}(m+2, m-n) \leqslant 2(m-n) + 1.$$

Все три слагаемых в левой части неравенства — делители числа $m - n$. Если каждое из них не превосходит $(m - n)/2$, их сумма не больше $\frac{3}{2}(m - n) < 2(m - n)$. Иначе одно из этих чисел равно m–n. Но если одно из чисел $n, m+1, m+2$ делится на $m-n$, то ещё одно из них отличается на 1 и потому взаимно просто с $m - n$, а другое — не более чем на 2, и его наибольший общий делитель с $m - n$ не превосходит 2. Поэтому сумма в левой части не превосходит $m - n + 3$, что не больше $2m - 2n + 1$ при $m - n > 1$. Если же $m - n = 1$, то обе части неравенства равны 3. □

Критерии

1 б. Замечено, что каждый из НОДов является делителем $m - n$.

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точка X лежит с A в разных полуплоскостях относительно прямой BC, причём $BX = DX$ и $\angle BXD = \angle ACB$. Точка Y также лежит с A в разных полуплоскостях относительно прямой BC, причём $CY = DY$ и $\angle CYD = \angle ABC$. Докажите, что прямые XY и AD перпендикулярны.

Решение. Отметим центр I_A вневписанной окружности треугольника ABC, соответствующей стороне BC. Как известно, $\angle AI_AC = \frac{1}{2}\angle ABC$. Таким образом мы получаем, что в треугольнике DI_AC отмечена такая точка Y, что $DY = YC$ и $\angle DYC = 2\angle DI_AC$. Это означает, что Y — центр описанной окружности треугольника DI_AC и $DY = YI_A$. Аналогично получаем, что $DX = XI_A$. Тогда XY является серединным перпендикуляром к DIA, откуда следует условие задачи.

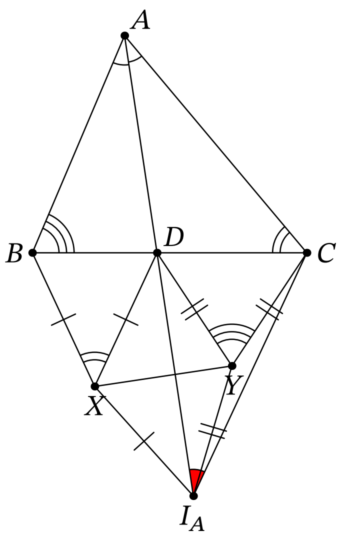

Рис. 2: К решению задачи 5

□

Задача 6. В каждой вершине правильного 13-угольника стоит по одному флажку красного или синего цвета. Докажите, что можно поменять местами два флажка так, чтобы раскраска всех флажков стала симметричной относительно некоторой оси симметрии 13-угольника.

Решение. Поскольку общее количество флажков нечётно, флажков одного из цветов — чётное количество. Без ограничения общности считаем, что красных флажков $2n$.

В случае $n = 1$, если раскраска уже симметрична, то достаточно поменять два красных флажка местами, а в противном случае достаточно поменять местами красный и синий флажки так, чтобы два красных стали соседними.

Теперь рассмотрим случай $n \geqslant 2$. Занумеруем вершины 13-угольника по кругу остатками по модулю 13. Рассмотрим суммы пар остатков, соответствующих красным флажкам. Всего таких пар

$\frac{2n\cdot(2n+1)}{2} = n(2n+1) > 13(n-2)$ при $n \geqslant 2$. Поэтому найдётся по крайней мере $n-1$ пара красных флажков, сумма остатков в каждой из которых даёт один и тот же остаток r. Тогда эти пары расположены симметрично относительно оси симметрии 13-угольника, соответствующей остатку $r/2$ — обозначим её ℓ (поскольку 13 — простое число, остаток $r/2$ существует). Также понятно, что найденные пары красных флажков попарно не пересекаются, поскольку если у двух пар остатков одинаковая сумма и один из остатков — общий, то эти пары совпадают. Теперь если оставшиеся два красных флажка также симметричны относительно ℓ, то раскраска уже симметрична относительно ℓ и достаточно поменять два красных флажка, симметричных относительно ℓ, местами. В противном случае, достаточно поменять синий и красный флажки местами так, чтобы оставшиеся два красных флажка стали располагаться симметрично относительно ℓ. $\square$

Критерии

- 0 б. Разбор случаев $\leqslant 4$ и $\geqslant 9$ красных флагов.
- 2 б. Разбор случая 5 или 8 красных флагов.