Разнобой 11

1. Назовём пятизначное число без нулевых цифр *интересным*, если оно является палиндромом (т. е. если прочитать его цифры в обратном порядке, то получится исходное число, например, 23432) и его средняя цифра в два раза больше первой. Может ли произведение 2025 интересных чисел быть точным квадратом?

2. К окружностям ω_1 и ω_2 проведены общие внешние касательные ℓ_1 и ℓ_2. На отрезке общей внешней касательной на прямой ℓ_1 выбрана точка A. Вторые касательные к окружностям ω_1 и ω_2, проведённые из точки A, пересекают ℓ_2 в точках B и C. Пусть D — центр вневписанной окружности треугольника ABC со стороны вершины A. Докажите, что A, D и центры ω_1 и ω_2 лежат на одной окружности.

3. **(а)** Положительные числа x, y и z удовлетворяют равенству $xyz = 1$. Докажите, что

$$\frac{x}{x+1+\frac{1}{y}} + \frac{y}{y+1+\frac{1}{z}} + \frac{z}{z+1+\frac{1}{x}} = 1.$$

(б) Положительные числа x, y и z удовлетворяют равенству

$$\frac{x}{x+1+\frac{1}{y}} + \frac{y}{y+1+\frac{1}{z}} + \frac{z}{z+1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Докажите, что $xyz = 1$.

4. Миша и Лена играют в игру. В начале Миша отмечает 99 точек на окружности и некоторые пары этих точек соединяет отрезками таким образом, чтобы из каждой точки выходил хотя бы один отрезок. После этого Лена может стереть несколько проведенных Мишей отрезков. Затем Миша платит Лене один рубль за каждую отмеченную точку, из которой теперь выходит нечётное число отрезков. Какую наибольшую сумму денег Лена может гарантированно заработать независимо от действий Миши?