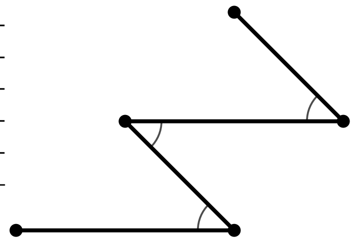
Геометрия плоских ломаных

1. Может ли прямая, не проходящая через вершины 11-угольника, пересекать все его стороны?

2. Будем называть *змейкой* ломаную, у которой все углы между соседними звеньями равны, причём для любого некрайнего звена соседние с ним звенья лежат в разных полуплоскостях от этого звена. Барон Мюнхгаузен заявил, что отметил на плоскости 6 точек и нашёл 6 разных способов соединить их (5-звенной) змейкой (вершины каждой из змеек — отмеченные точки). Могут ли его слова быть правдой?



3. Замкнутая ломаная пересекает каждое своё звено ровно один раз. Может ли каждая точка самопересечения делить оба пересекающихся в ней звена в отношении $2 : 1$?

4. На плоскости дана замкнутая ломаная с конечным числом звеньев. Прямая ℓ пересекает её ровно в 2025 точках. Докажите, что существует прямая, пересекающая эту ломаную более чем в 2025 точках.

5. *Маршрутом коня* на шахматной доске 8×8 назовём ломаную, вершины которой лежат в центрах клеток, а рёбра соответствуют ходам коня. Докажите, что в любом замкнутом маршруте коня, обходящем каждую клетку доски 8×8 ровно по 1 разу, найдутся два последовательных ребра, образующие угол 90°.

6. На плоскости даны отрезки M_1N_1, M_2N_2, …, M_kN_k ($k \geqslant 2$), причём никакие два из них не лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Докажите, что существует выпуклый, центрально симметричный многоугольник со сторонами

$$\frac{M_1N_1}{2}, \frac{M_2N_2}{2}, \ldots, \frac{M_kN_k}{2}, \frac{M_1N_1}{2}, \frac{M_2N_2}{2}, \ldots, \frac{M_kN_k}{2},$$

в котором для каждого $k \geqslant i \geqslant 1$ стороны длины $\frac{M_iN_i}{2}$ параллельны отрезку M_iN_i.