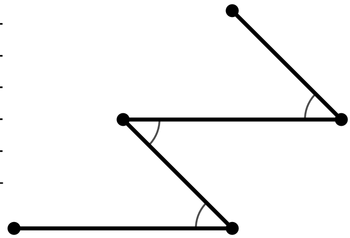
Геометрия плоских ломаных

1. Может ли прямая, не проходящая через вершины 11-угольника, пересекать все его стороны?

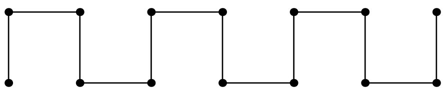
2. Будем называть *змейкой* ломаную, у которой все углы между соседними звеньями равны, причём для любого некрайнего звена соседние с ним звенья лежат в разных полуплоскостях от этого звена. Барон Мюнхгаузен заявил, что отметил на плоскости 6 точек и нашёл 6 разных способов соединить их (5-звенной) змейкой (вершины каждой из змеек — отмеченные точки). Могут ли его слова быть правдой?



3. На плоскости дана замкнутая ломаная с конечным числом звеньев. Прямая ℓ пересекает её ровно в 2025 точках. Докажите, что существует прямая, пересекающая эту ломаную более чем в 2025 точках.

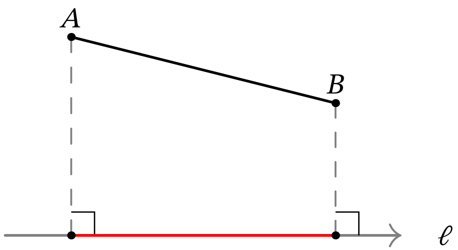
4. *Маршрутом коня* на шахматной доске 8×8 назовём ломаную, вершины которой лежат в центрах клеток, а рёбра соответствуют ходам коня. Докажите, что в любом замкнутом маршруте коня, обходящем каждую клетку доски 8×8 ровно по 1 разу, найдутся два последовательных ребра, образующие угол 90°.

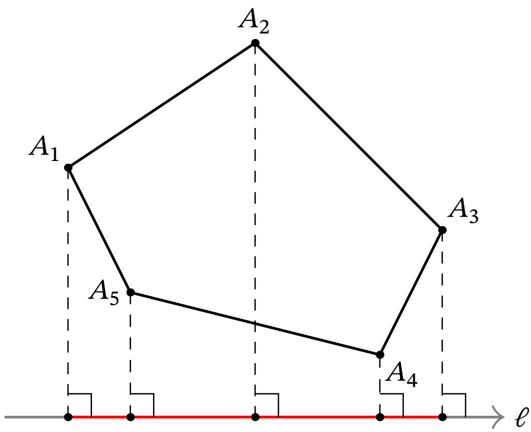
5. Дан клетчатый прямоугольник $1 \times n$. Рассмотрим несамопересекающиеся ломаные, состоящие из $2n+1$ отрезка, соединяющие вершины клеток и проходящие через каждую из $2n+2$ вершин клеток ровно по одному разу (рёбра не обязаны идти по сторонам клеток). Сколько таких ломаных начинается в левой нижней клетке и заканчивается в правой верхней?



Пример ломаной для $n = 6$

Обозначение. На плоскости проведена прямая ℓ. Через $l(AB)$ обозначим длину ортогональной проекции отрезка AB на прямую ℓ. Для выпуклого многоугольника P обозначим через $l(P)$ длину проекции объединения всех сторон P на прямую ℓ.





6. **(а)** Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ и некоторая прямая ℓ. Докажите, что

$$2l(A_1A_2 \ldots A_n) = l(A_1A_2) + l(A_2A_3) + \ldots + l(A_{n-1}A_n) + l(A_nA_1).$$

(б) На плоскости даны отрезки M_1N_1, M_2N_2, …, M_kN_k $(k \geqslant 2)$, причём никакие два из них не лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Индукцией по k докажите, что существует выпуклый, центрально симметричный многоугольник со сторонами

$$\frac{M_1N_1}{2}, \frac{M_2N_2}{2}, \ldots, \frac{M_kN_k}{2}, \frac{M_1N_1}{2}, \frac{M_2N_2}{2}, \ldots, \frac{M_kN_k}{2},$$

в котором для каждого $k \geqslant i \geqslant 1$ стороны длины $\frac{M_iN_i}{2}$ параллельны отрезку M_iN_i.

(в) На плоскости даны два набора отрезков

$$\sigma_1 = \{A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n\} \text{ и } \sigma_2 = \{C_1D_1, C_2D_2, \ldots, C_mD_m\},$$

а также прямые $\ell_1, \ell_2 \ldots, \ell_n$ такие, что $\ell_i \perp A_iB_i$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что если для каждого i сумма длин проекций отрезков набора σ_1 на прямую ℓ_i больше суммы длин проекций отрезков набора σ_2 на прямую ℓ_i, то сумма длин отрезков набора σ_1 больше суммы длин отрезков набора σ_2.

Указание. С помощью пункта **(б)** постройте по двум данным наборам отрезков выпуклые центрально симметричные многоугольники с общим центром симметрии. В предположении противного из условия пункта **(в)**, пользуясь **(а)**, выведите, что многоугольник, построенный по набору σ_2, лежит внутри многоугольника, построенного по набору σ_1.