Таблицы

1. Дана таблица 8×8, покрашенная в шахматном порядке. Разрешается менять местам любые две строки или любые два столбца. Можно ли за несколько таких операций сделать так, чтобы верхняя половина таблицы стала белой, а нижняя — чёрной?

2. Двое игроков по очереди расставляют в каждой из 24 клеток поверхности куба $2 \times 2 \times 2$ числа $1, 2, 3, \ldots, 24$ (каждое число можно ставить один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Сможет ли первый игрок ему помешать?

3. Дана доска 20×25, горизонтали которой занумерованы числами от 1 до 20, а вертикали — числами от 1 до 25. Никита хочет поместить в некоторые клетки этой доски по одному драгоценному камню так, чтобы на доске находился хотя бы один камень и чтобы выполнялось такое магическое условие: для любых $1 \leqslant i \leqslant 20$ и $1 \leqslant j \leqslant 25$ в клетке, расположенной на пересечении i–й горизонтали и j–й вертикали, находится камень тогда и только тогда, когда в «кресте», являющемся объединением i–й горизонтали и j–й вертикали, находится ровно $i + j$ камней. Выясните, осуществимо ли желание Никиты.

4. Квадратная таблица $n \times n$ заполнена вещественными числами. Подсчитаны $2n$ сумм по строкам и по столбцам. При каких n может оказаться, что среди этих сумм встретятся все целые числа от 1 до $2n$?

5. Назовём *лабиринтом* шахматную доску 8×8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. Если ладья может обойти все поля, не перепрыгивая через перегородки, то лабиринт называется хорошим, иначе — плохим. Каких лабиринтов больше — хороших или плохих?

6. Квадратная таблица $3n \times 3n$ заполнена вещественными числами. Оказалось, что все $6n$ сумм по строкам и по столбцам различны. Найдите наибольшее возможное количество нулей в такой таблице.