Многочлены. Часть вторая

Определение. *Разделить* многочлен $P(x)$ на ненулевой многочлен $Q(x)$ *с остатком* означает найти такие многочлены $H(x)$ и $R(x)$, что

$$P(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x) \quad \text{и} \quad \deg R < \deg Q.$$

Многочлен $R(x)$ называется *остатком от деления*, а многочлен $H(x)$ — *неполным частным*.

1. Разделите с остатком столбиком

(а) $6x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 10x + 8$ на $2x^2 - x + 2$;

(б) $x^{105} + x + 1$ на $x^2 - 1$.

Теорема Безу. Пусть a — вещественное число. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$.

2. **(а)** Чему равна степень остатка от деления на двучлен $x - a$?

(б) Докажите теорему Безу.

(в) Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда a является его корнем.

(г) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — различные числа. Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на произведение $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_k)$ тогда и только тогда, когда числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ являются его корнями.

3. Докажите, что у многочлена степени n не более n различных корней.

Определение. Два многочлена *равны формально*, если все их соответственные коэффициенты равны. Два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ *равны функционально*, если $P(a) = Q(a)$ для любого вещественного числа a.

4. Докажите, что два многочлена равны функционально тогда и только тогда, когда они равны формально.

5. Многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет на интервале $(0, 2)$ три корня. Докажите, что

$$-2 < p + q + r < 0.$$

6. Ваня выписал на доске 100 различных чисел. Затем он увеличил все числа на один. Оказалось, что произведение чисел не изменилось. Затем он повторил операцию, и произведение чисел снова не изменилось. Какое наибольшее количество раз он мог повторить эту операцию, чтобы произведение чисел оставалось постоянным?