

Разнобой–10

1. Точки M и N делят основание AC равнобедренного треугольника ABC , в котором $\angle B = 120^\circ$, на три равные части. Докажите, что треугольник MBN — равносторонний.
2. Некоторые n вершин правильного $2n$ -угольника раскрашены в красный цвет, остальные — в синий. Полный обход окружности, описанной около $2n$ -угольника, в направлении против часовой стрелки назовём *удачным*, если в любой момент времени количество пройденных красных вершин не меньше числа пройденных синих вершин. Докажите, что вне зависимости от исходной раскраски, найдётся точка, обход с началом в которой — удачный.
3. Дано конечное множество A натуральных чисел. Докажите, что существует натуральное число b такое, что для каждого $a \in A$ число ab будет степенью (выше первой) натурального числа.
4. Кусок сыра массой 1 кг разрезали на $n \geq 4$ кусков массами меньше 600 г. Оказалось, что их нельзя разбить на две кучки так, чтобы масса каждой кучки была не меньше 400 г, но не больше 600 г (кучка может состоять из одного или нескольких кусков). Докажите, что найдутся три таких куска, что суммарная масса любых двух из них больше 600 г.