

## Соображения единственности в геометрии

1. Точки  $M$  и  $N$  делят основание  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$ , в котором  $\angle B = 120^\circ$ , на три равные части. Докажите, что треугольник  $MBN$  — равносторонний.
2. Внутри квадрата расположены три окружности, каждая из которых касается внешним образом двух других, а также касается двух сторон квадрата. Докажите, что радиусы двух из данных окружностей одинаковы.
3. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ), в котором  $\angle A = 30^\circ$ . На стороне  $AB$  выбрана точка  $P$ , а на стороне  $AC$  — точка  $Q$  так, что  $PQ = BC$  и  $\angle PQC = 45^\circ$ . Докажите, что  $CP = BC$ .
4. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  в два раза больше угла  $B$ ,  $CD$  — биссектриса треугольника. Из середины  $M$  стороны  $BC$  опущен перпендикуляр  $MH$  на отрезок  $CD$ . На стороне  $AB$  нашлась такая точка  $K$ , что  $KMH$  — равносторонний треугольник. Докажите, что точки  $M$ ,  $H$  и  $A$  лежат на одной прямой.
5. Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что точка пересечения медиан треугольника  $ABD$  лежит на прямой  $CF$ , где  $F$  — проекция  $D$  на  $AB$ .
6. На боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  отмечены точки  $D$  и  $E$  так, что  $\angle BED = 3\angle BDE$ . Точка  $D'$  симметрична точке  $D$  относительно прямой  $AC$ . Докажите, что прямая  $D'E$  проходит через точку пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ .
7. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $45^\circ$ , а чевианы  $BD$  и  $CF$  равны и перпендикулярны. Докажите, что  $BC = BD$ .