

Числа Каталана

Определение. *Правильной скобочной последовательностью* называется такая последовательность из n открывающих скобок «(» и n закрывающих скобок «)», что среди любых k первых скобок ($k = 1, 2, \dots, 2n$) открывающих скобок не меньше чем закрывающих.

Определение. Пусть n — натуральное число, n -е число Каталана C_n — это число правильных скобочных последовательностей длины $2n$.

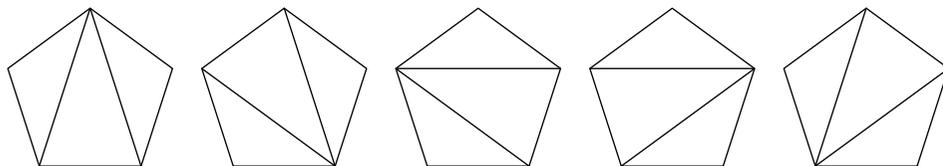
- Докажите, что в правильной скобочной последовательности можно единственным способом разбить скобки на пары так, чтобы
 - в любой паре были разные скобки и при этом скобка «(» стояла левее скобки «)»;
 - две любые пары скобок не были «зацеплены». То есть запрещено такое:

$$\dots (1 \dots (2 \dots)_1 \dots)_2 \dots$$

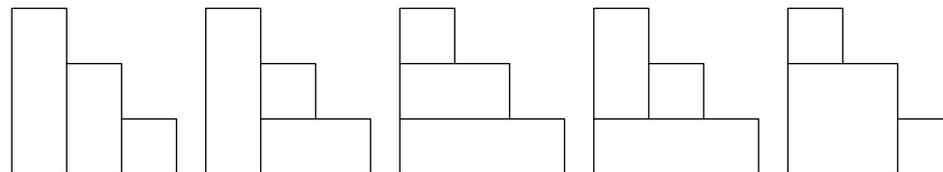
- Частица вылетает из точки $(0, 0)$ и за одну секунду проходит либо единицу расстояния вправо, либо единицу вверх. Докажите, что количество способов добраться до точки (n, n) , не поднимаясь строго выше прямой $y = x$, равно C_n .
 - Докажите, что количество способов, которыми частица может добраться до точки (n, n) , поднявшись выше прямой $y = x$, совпадает с количеством способов, которыми частица может добраться до точки $(n - 1, n + 1)$.
 - Выведите явную формулу числа Каталана из предыдущего пункта.
- Докажите, что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \dots + C_n C_0 \text{ (при } n \geq 0), C_0 = 1.$$

- Найдите количество таблиц $2 \times n$, в которые вписаны числа от 1 до $2n$ каждое по одному разу, и в каждой вертикали и горизонтали которых числа возрастают.
- Сколькими способами можно разрезать выпуклый n -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники? Разрезания, отличающиеся поворотом, считаются различными.



- Сколькими способами можно разбить лестницу ширины и высоты n на n прямоугольников?



- Упорядоченным корневым деревом назовём дерево с выделенной вершиной, подвешенное за эту вершину, потомки каждой вершины которого пронумерованы.
 - Найдите количество упорядоченных корневых деревьев с n вершинами.
 - Найдите количество бинарных деревьев с n листьями — упорядоченных корневых деревьев, у каждой вершины которого 0 либо 2 потомка.