Многочлены. Часть первая

Определение. *Многочленом* называется выражение вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n \neq 0$, а коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ принадлежат некоторому числовому множеству.

Число n называется *степенью* многочлена P и обозначается $\deg P$. Степень нулевого многочлена принято считать равной $-\infty$.

Коэффициент a_n называется *старшим коэффициентом* многочлена P, а коэффициент a_0 — *свободным членом*.

Два многочлена *равны формально*, если равны их все соответственные коэффициенты.

1. Найдите степень и старший коэффициент многочлена

(а) $(x+1)^{10} \cdot (1-2x^2)^3$;

(б) $(x^2+x+1)^6 - (x+1)^{12}$.

2. Найдите свободный член и сумму коэффициентов многочлена

(а) $(x^2-x+1)^{2025}$;

(б) $(3x^2-4x-2)^{20}$.

3. Дан многочлен $(1+x^2+x^4)^{30} + (1+x^3+x^6)^{20}$.

(а) Сколько ненулевых коэффициентов имеет этот многочлен?

(б) Чему равна сумма коэффициентов при чётных степенях этого многочлена?

4. Многочлен $P(x)$ таков, что

$$P(x-1) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1.$$

Найдите $P(x)$.

5. **(а)** Докажите, что если привести многочлен $(x^3-x^2+1)^{2025}$ к стандартному виду, то какой-то из коэффициентов будет отрицательным.

(б) Докажите, что любая натуральная степень многочлена $x^4+x^3-3x^2+x+2$ имеет хотя бы один отрицательный коэффициент.

6. Вадим задумал многочлен $P(x)$, все коэффициенты которого являются целыми неотрицательными числами. Артемий может назвать любое натуральное число k и спросить у Вадима, чему равно значение $P(k)$. За какое наименьшее число вопросов Артемий сможет гарантированно узнать все коэффициенты многочлена P?

7. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $(P(x))^n$, $n > 1$, положительны?