Отображения

Декартовым произведением множеств A и B называется множество упорядоченных пар

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Соответствием между множествами A и B называется произвольное подмножество $F \subset A \times B$.

Соответствие между множествами A и B называется *отображением*, если для каждого $a \in A$ существует единственное $b \in B$, такое что $(a, b) \in F$. Дальше будем писать $b = F(a)$, а само отображение обозначать $F\colon A \to B$.

Образом $F(S)$ множества $S \subset A$ при отображении F называется множество $\{F(s) \mid s \in S\}$.

Прообразом $F^{-1}(T)$ множества $T \subset B$ при отображении F называется множество $\{s \mid F(s) \in T\}$.

1. Пусть $F : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$. Всегда ли верно, что
(а) $F(X) = Y$; **(б)** $F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) \cup F(A_2)$;
(в) $F(A_1 \cap A_2) = F(A_1) \cap F(A_2)$; **(г)** если $F(A_1) \subset F(A_2)$, то $A_1 \subset A_2$?

Отображение $F : A \to B$ называется *инъекцией*, если для любых различных a_1, a_2 выполнено $F(a_1) \neq F(a_2)$.

Отображение $F : A \to B$ называется *сюръекцией*, если для любого $b \in B$ найдётся такой $a \in A$, что $b = F(a)$.

Биекцией называется отображение, являющееся одновременно инъекцией и сюръекцией.

2. Сколько существует между множествами из n и m элементов **(а)** отображений; **(б)** инъекций; **(в)** сюръекций[1]?

3. Пусть $F : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$. Всегда ли верно, что
(а) $F^{-1}(Y) = X$; **(б)** $F^{-1}(B_1 \cup B_2) = F^{-1}(B_1) \cup F^{-1}(B_2)$;
(в) $F^{-1}(B_1 \cap B_2) = F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2)$; **(г)** если $F^{-1}(B_1) \subset F^{-1}(B_2)$, то $B_1 \subset B_2$?

Пусть $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ — два отображения. Их *композицией* $g \circ f$ называется отображение $h\colon A \to C$, определённое по формуле $h(a) = g(f(a))$ для любого $a \in A$.

Пусть $F \subset A \times B$ — соответствие. *Обратным соответствием* называется соответствие $G \subset B \times A$, такое что $(b, a) \in G$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in F$. Обозначение: $G = F^{-1}$.

4. Найдите $f \circ g$ и $g \circ f$, если:

(а) $A = B = C = \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$, $g(m) = 2m$;
(б) $A = B = C = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$, $g(y) = y^2$.

5. **(а)** Докажите, что композиция инъекций является инъекцией.

(б) Докажите, что композиция сюръекций является сюръекцией.

6. Найдите обратные к следующим отображениям:
(а) $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 3x + 2$; **(б)** $F\colon \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $F(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

[1] Можно оставить ответ в качестве суммы

7. Докажите ассоциативность композиции: если $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$, то

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

8. Приведите пример двух таких отображений $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых выполнено равенство $g \circ f = f \circ g$, причём $f(x) \neq x$ и $g(x) \neq x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

9. Отображения $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ таковы, что $f \circ g$, $g \circ f$ — биекции. Верно ли, что отображения f и g биективны?

10. Дано отображение

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = x - \lfloor 2x \rfloor$$

Докажите, что F является биекцией и найдите F^{-1}.

11. Существует ли такое инъективное отображение $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, что $F(xy) = F(x) + F(y)$ для всех натуральных x и y?

12. Является ли отображение $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, определённое равенством $F(n) = \{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\}$, инъективным?