

## Прямая Симсона

**Прямая Симсона.** Дан треугольник  $ABC$  и точка  $P$ . Пусть  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — основания перпендикуляров из точки  $P$  на прямые  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно. Тогда точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$  тогда и только тогда, когда  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой (будем обозначать ее  $\ell_P$ ).

1. Пусть  $AA_1, BB_1, CC_1$  — высоты остроугольного треугольника  $ABC$ . Докажите, что основания перпендикуляров из точки  $A_1$  на прямые  $AB, AC, BB_1, CC_1$  лежат на одной прямой.
2. Пусть  $VH$  и  $BL$  — высота и биссектриса остроугольного треугольника  $ABC$  соответственно. Точка  $P$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на  $BL$ ,  $Q$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $L$  на сторону  $BC$ . Докажите, что точки  $H, P, Q$  лежат на одной прямой.
3. Точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .
  - (а) Перпендикуляр из точки  $P$  на прямую  $AC$  продлили до второго пересечения с описанной окружностью в точке  $Q$ . Докажите, что прямая  $BQ$  параллельна  $\ell_P$ .
  - (б) Докажите, что  $\ell_P$  проходит через середину отрезка  $PH$ , где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ .
4. Докажите, что для точек  $P$  и  $Q$  на описанной окружности верно равенство

$$\angle(\ell_P, \ell_Q) = \frac{\widehat{QP}}{2}.$$

5. **Задача 255.** Пусть  $A_0$  и  $C_0$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $BC$  и  $BA$  треугольника  $ABC$ ,  $K$  — точка пересечения биссектрисы угла  $A$  с прямой  $A_0C_0$ . Докажите, что  $\angle AKC = 90^\circ$ .
6. Пусть  $M$  и  $N$  — середины гипотенузы  $AB$  и катета  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  соответственно. Внеписанная окружность треугольника  $ACM$  касается стороны  $AM$  в точке  $Q$ , а прямой  $AC$  — в точке  $P$ . Докажите, что точки  $P, Q$  и  $N$  лежат на одной прямой.
7. В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ . Пусть  $AA_1$  и  $CC_1$  — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине относительно прямой  $A_1C_1$ , лежит на стороне  $AC$ .
8. Пусть  $AD$  — биссектриса неравностороннего треугольника  $BAC$ . Кроме того, пусть  $F$  и  $G$  — точки на описанной окружности  $ABC$ , а  $E \neq D$  — точка на прямой  $BC$ , такая, что  $AF = AE = AD = AG$ . Точки  $X$  и  $Y$  — основания перпендикуляров из  $D$  к  $EF$  и  $EG$ , соответственно. Докажите, что  $XY \parallel AD$ .
9. Описанные окружности треугольников  $ABC$  и  $DEF$  совпадают. Обозначим через  $O$  центр описанной окружности треугольника, образованного прямыми Симсона точек  $D, E, F$  относительно треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $O$  — середина отрезка, соединяющего ортоцентры треугольников  $ABC$  и  $DEF$ .