

Прямая Симсона

Прямая Симсона. Дан треугольник ABC и точка P . Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров из точки P на прямые BC, AC и AB соответственно. Тогда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (будем обозначать ее ℓ_P).

1. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что основания перпендикуляров из точки A_1 на прямые AB, AC, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.
2. Пусть VH и VL — высота и биссектриса остроугольного треугольника ABC соответственно. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BL , Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на сторону BC . Докажите, что точки H, P, Q лежат на одной прямой.
3. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC .
 - (а) Перпендикуляр из точки P на прямую AC продлили до второго пересечения с описанной окружностью в точке Q . Докажите, что прямая BQ параллельна ℓ_P .
 - (б) Докажите, что ℓ_P проходит через середину отрезка PH , где H — ортоцентр треугольника ABC .
4. Докажите, что для точек P и Q на описанной окружности верно равенство

$$\angle(\ell_P, \ell_Q) = \frac{\widehat{QP}}{2}.$$

5. **Задача 255.** Пусть A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и BA треугольника ABC , K — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой A_0C_0 . Докажите, что $\angle AKC = 90^\circ$.
6. Пусть M и N — середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC соответственно. Внеписанная окружность треугольника ACM касается стороны AM в точке Q , а прямой AC — в точке P . Докажите, что точки P, Q и N лежат на одной прямой.
7. В треугольнике ABC угол B равен 60° . Пусть AA_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине относительно прямой A_1C_1 , лежит на стороне AC .
8. Пусть AD — биссектриса неравностороннего треугольника BAC . Кроме того, пусть F и G — точки на описанной окружности ABC , а $E \neq D$ — точка на прямой BC , такая, что $AF = AE = AD = AG$. Точки X и Y — основания перпендикуляров из D к EF и EG , соответственно. Докажите, что $XY \parallel AD$.
9. Описанные окружности треугольников ABC и DEF совпадают. Обозначим через O центр описанной окружности треугольника, образованного прямыми Симсона точек D, E, F относительно треугольника ABC . Докажите, что O — середина отрезка, соединяющего ортоцентры треугольников ABC и DEF .