Прямая Симсона

Прямая Симсона. *Дан треугольник ABC и точка P. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров из точки P на прямые BC, AC и AB соответственно. Тогда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (будем обозначать ее ℓ_P).*

1. Пусть BH и BL — высота и биссектриса остроугольного треугольника ABC соответственно. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BL, а Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на сторону BC. Докажите, что точки H, P, Q лежат на одной прямой.

2. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

(а) Перпендикуляр из точки P на прямую AC продлили до второго пересечения с описанной окружностью в точке Q. Докажите, что прямая BQ параллельна ℓ_P.

(б) Докажите, что ℓ_P проходит через середину отрезка PH, где H — ортоцентр треугольника ABC.

3. Докажите, что для точек P и Q на описанной окружности верно равенство

$$\angle(\ell_P, \ell_Q) = \frac{\overset{\frown}{QP}}{2}.$$

4. **Задача 255.** Пусть A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и BA треугольника ABC, K — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой A_0C_0. Докажите, что $\angle AKC = 90°$.

5. Пусть M и N — середины гипотенузы AB и катета BC прямоугольного треугольника ABC соответственно. Вневписанная окружность треугольника ACM касается стороны AM в точке Q, а прямой AC — в точке P. Докажите, что точки P, Q и N лежат на одной прямой.

6. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. Пусть AA_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине относительно прямой A_1C_1,лежит на стороне AC.

7. Пусть AD — биссектриса неравнобедренного треугольника BAC. Кроме того, пусть F и G — точки на описанной окружности ABC, а $E \neq D$ — точка на прямой BC, такая, что $AF = AE = AD = AG$. Точки X и Y — основания перпендикуляров из D к EF и EG, соответственно. Докажите, что $XY \parallel AD$.

8. Описанные окружности треугольников ABC и DEF совпадают. Обозначим через O центр описанной окружности треугольника, образованного прямыми Симсона точек D, E, F относительно треугольника ABC. Докажите, что O — середина отрезка, соединяющего ортоцентры треугольников ABC и DEF.

9. Докажите, что существуют ровно три точки на описанной окружности, для которых прямая Симсона касается окружности девяти точек, и при этом эти точки образуют равносторонний треугольник.