Десятичная запись дробей

1. Даны натуральные числа m, n и цифры $a_1, a_2 \dots, a_n$.

(а) Докажите, что если выполнено равенство

$$\frac{10^n - 1}{m} = \overline{a_1 a_2 \dots a_n},$$

то десятичная запись дроби $1/m$ имеет вид $0,(a_1 a_2 \dots a_n)$.

(б) Докажите обратное.

2. Докажите, что любое рациональное число представляется периодической дробью в любой системе счисления.

3. **(а)** Докажите, что натуральное число m имеет вид $2^a \cdot 5^b$ тогда и только тогда, когда десятичная дробь $1/m$ — конечная.

(б) Обобщите это утверждение на произвольную систему счисления.

4. Рациональное число $1/p$ ($p > 5$ – простое число) записали в виде десятичной дроби. Докажите, что получится периодическая десятичная дробь без предпериода.

5. Дано простое число $p > 5$. Докажите, что длина периода дроби n/p является делителем числа $p - 1$.

6. Пусть m/n — несократимая дробь. Докажите, что сумма длин периода и предпериода десятичной записи этой дроби не превосходит $\varphi(n) + 1$.

7. Период правильной дроби n/p ($p > 5$ — простое число) состоит из $2m$ цифр. Докажите, что его можно представить в виде $\overline{M_1 M_2}$, где

$$M_1 + M_2 = \underbrace{99 \dots 9}_{m \text{ девяток}}.$$

8. Пусть число m имеет вид $m = 2^a 5^b m_1$, где $(m_1, 10) = 1$. Пусть $k = \max(a, b)$. Докажите, что период дроби $1/m$ начинается с $(k+1)$-ой позиции после запятой и имеет такую же длину, как и период дроби $1/m_1$.

9. Найдите три последние цифры периодов дробей $1/107$, $1/131$, не считая весь период.

10. Является ли α рациональным числом, если

(а) $\alpha = 0,101001000100001\dots$?

(б) $\alpha = 0,12457\dots$, где n-я цифра после запятой числа α равна цифре слева от запятой числа $n\sqrt{2}$?