Разнобой–8

1. Целые числа a, b, c и натуральное число n таковы, что $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=2n+1$. Докажите, что $a^3+b^2-a^2-b^3$ делится на n.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны $100°$. На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $AX=CY$. Оказалось, что прямая YD параллельна биссектрисе угла ABC. Найдите угол AXY.

3. У фокусника есть колода из 52 карт. Он объявляет, что 51 из них будут выкинуты, а останется пиковая дама. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с верхнего или нижнего края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях пиковой дамы можно гарантировать успех фокуса?

4. Каждое из чисел x, y и z не меньше 0 и не больше 1. Докажите неравенство

$$\frac{x^2}{1+x+xyz}+\frac{y^2}{1+y+xyz}+\frac{z^2}{1+z+xyz}\leqslant 1.$$

5. Несколько человек разного возраста сыграли несколько партий в настольный теннис. Каждый игрок сыграл по одной партии с четырьмя другими игроками, ничьих в настольном теннисе не бывает. Докажите, что либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников старше его, либо найдется игрок, выигравший хотя бы у двух соперников младше его.

6. Внутри квадрата отметили несколько точек и соединили их отрезками между собой и с вершинами квадрата так, чтобы отрезки не пересекались друг с другом (нигде кроме концов). В результате квадрат разделился на треугольники, так что все отмеченные точки оказались в вершинах треугольников, и ни одна не попала на стороны треугольников. Для каждой отмеченной точки и для каждой вершины квадрата подсчитали число проведённых из неё отрезков. Могло ли так случиться, что все эти числа оказались чётными?