

Разнобой по комбинаторной геометрии

1. Два шестиугольника приставили друг к другу так, что получился новый многоугольник. Какое наименьшее число сторон могло у него получиться?
2. На плоскости отметили 5 точек с целыми координатами. Докажите, что как минимум одна из середин отрезков с вершинами в них также имеет целые координаты.
3. Пусть P — правильный 10-угольник, вырезанный из картона. Артемий кладёт его на плоскость и считает какое количество различных значений принимают x -координаты вершин P . Какой ответ мог получить Артемий? Укажите все возможные варианты.
4. Два игрока по очереди ставят точки в узлы бесконечной клетчатой плоскости. В каждый момент времени все точки должны лежать в вершинах выпуклого многоугольника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
5. Дан клетчатый прямоугольник $1 \times n$. Рассмотрим самонепересекающиеся ломанные, состоящие из $2n + 1$ отрезка, соединяющие вершины клеток и проходящие через каждую из $2n + 2$ вершин клеток ровно по одному разу. Сколько таких ломанных начинается в левой нижней клетке и заканчивается в правой верхней?
6. В выпуклом многоугольнике из каждой вершины опущены перпендикуляры на все не смежные с ней стороны. Может ли оказаться так, что основание каждого перпендикуляра попало на продолжение стороны, а не на саму сторону?
7. Какое наибольшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы попарные расстояния между ними принимали не больше двух различных значений?