

Принципиальная геометрия

1. На плоскости отметили 5 точек с целыми координатами. Докажите, что как минимум одна из середин отрезков с вершинами в них также имеет целые координаты.
2. Внутри правильного треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Докажите, что среди них найдутся две, расстояние между которыми не больше $1/2$.
3. В квадрате со стороной 1 отметили 9 точек так, что никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Докажите, что некоторые 3 из этих точек образуют треугольник площади не больше $1/8$.
4. Мишень для дартса имеет форму правильного шестиугольника со стороной $\sqrt{3}$. В мишень попали 25 раз. **(а)** Докажите, что найдётся окружность радиуса 1, которая покрывает как минимум 5 следов от дротиков. **(б)** Останется ли утверждение верным, если попаданий было 16? **(в)*** Каким будет ответ на вопрос пункта (б) для произвольного числа попаданий?
5. На окружности радиуса 1 отмечены несколько дуг общей длины 2. Докажите, что в окружность можно вписать правильный треугольник так, чтобы никакая вершина не попала на эти дуги.
6. Каждый день Фрэнк Бок выпекает квадратный торт размером 3×3 . Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?
7. Какое наибольшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы попарные расстояния между ними принимали не больше двух различных значений?