

Целая и дробная часть

1. У Пети есть калькулятор, на котором есть кнопка F. При нажатии на кнопку F, к числу прибавляется его дробная часть (например, из числа 2,36 получается число 2,72). Начав с положительного числа, меньшего 1, Петя за десять нажатий кнопки F получил число 10. С какого положительного числа он мог начать?

2. Решите уравнение $\sqrt{1 + \{2x\}} = \lfloor x^2 \rfloor + 2\lfloor x \rfloor + 3$.

3. Найдите все натуральные n , при которых число $\lfloor \frac{n^2}{5} \rfloor$ является простым.

4. Покажите, что для любого вещественного x и натурального n имеет место равенство

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{n} \rfloor + \dots + \lfloor x + \frac{n-1}{n} \rfloor.$$

5. Числа x, y, z, t таковы, что

$$\{x + y + z\} = \{x + y + t\} = \{x + z + t\} = \{y + z + t\} = \frac{1}{4}.$$

Чему равно $\{x + y + z + t\}$?

6. Найдите наименьшее вещественное число x , для которого выполнено неравенство

$$\{x\} \cdot \lfloor x \rfloor \geq 2025.$$

7. Существует ли положительное число α , удовлетворяющее равенству $\{\alpha\} + \{1/\alpha\} = 1$?

8. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что

$$\lfloor \frac{p}{q} \rfloor + \lfloor \frac{2p}{q} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{(q-1)p}{q} \rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$