

Целая и дробная часть

1. У Пети есть калькулятор, на котором есть кнопка F. При нажатии на кнопку F, к числу прибавляется его дробная часть (например, из числа 2,36 получается число 2,72). Начав с положительного числа, меньшего 1, Петя за десять нажатий кнопки F получил число 10. С какого положительного числа он мог начать?

2. Найдите все натуральные n , при которых число $\left\lfloor \frac{n^2}{5} \right\rfloor$ является простым.

3. Покажите, что для любого вещественного x и натурального n имеет место равенство

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor.$$

4. Существует ли положительное число α , удовлетворяющее равенству $\{\alpha\} + \{1/\alpha\} = 1$?

5. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

6. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство

$$\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

7. Для натурального n и положительного x докажите неравенство

$$\lfloor nx \rfloor \geq \frac{\lfloor x \rfloor}{1} + \frac{\lfloor 2x \rfloor}{2} + \dots + \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$