Квадраты отрезков

1. **(а)** Даны точки A, B и произвольное вещественное число c. Докажите, что на прямой AB есть ровно одна точка P такая, что $PA^2 - PB^2 = c$.

   (б) Даны точки A, B на плоскости и вещественное число c. Докажите, что геометрическим местом точек P, для которых выполнено равенство

   $$PA^2 - PB^2 = c,$$

   является прямая, перпендикулярная AB.

   (в) Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

   $$PA^2 - PB^2 = QA^2 - QB^2.$$

2. **Теорема Карно.** Дан треугольник ABC и точки A', B', C'. Докажите, что перпендикуляры к BC, CA, AB, проведенные из точек A', B', C' соответственно, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

   $$(B'A^2 - B'C^2) + (A'C^2 - A'B^2) + (C'B^2 - C'A^2) = 0.$$

3. Через вершину A треугольника ABC провели прямую, параллельную стороне BC. Эта прямая повторно пересекла описанную окружность треугольника в точке A_1. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1, C_1 опустили перпендикуляры на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

4. Даны трапеция $ABCD$ и перпендикулярная её основаниям AD и BC прямая ℓ. По ℓ движется точка X. Перпендикуляры, опущенные из A на BX и из D на CX пересекаются в точке Y. Найдите ГМТ Y.

5. Через вершины B и C треугольника ABC перпендикулярно прямой BC проведены прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекают прямые b и c соответственно в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC.

6. Описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны AD и CD параллелограмма $ABCD$ в точках K и L. Пусть M — середина дуги KL, не содержащей точку B. Докажите, что $DM \perp AC$.

7. Точки A', B', C' — основания перпендикуляров из вершин A, B, C треугольника ABC на прямую ℓ. Докажите, что перпендикуляры из A', B', C' на BC, AC, AB пересекаются в одной точке.

8. Дан описанный четырехугольник $ABCD$, в котором диагональ AC не является биссектрисой угла C. На этой биссектрисе отмечена точка E, такая, что AE и BD перпендикулярны. Точка F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на сторону BC. Докажите, что $AB = BF$.