

Квадраты отрезков

1. (а) Даны точки A , B и произвольное вещественное число c . Докажите, что на прямой AB есть ровно одна точка P такая, что $PA^2 - PB^2 = c$.

(б) Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$PA^2 - PB^2 = QA^2 - QB^2.$$

2. **Теорема Карно.** Дан треугольник ABC и точки A' , B' , C' . Докажите, что перпендикуляры к BC , CA , AB , проведенные из точек A' , B' , C' соответственно, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$(B'A^2 - B'C^2) + (A'C^2 - A'B^2) + (C'B^2 - C'A^2) = 0.$$

3. Докажите, что перпендикуляры, проведённые из центров вневписанных окружностей к тем сторонам треугольника, которых эти окружности касаются, пересекаются в одной точке.
4. Даны трапеция $ABCD$ и перпендикулярная её основаниям AD и BC прямая ℓ . По ℓ движется точка X . Перпендикуляры, опущенные из A на BX и из D на CX пересекаются в точке Y . Найдите ГМТ Y .
5. Через вершины B и C треугольника ABC перпендикулярно прямой BC проведены прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекают прямые b и c соответственно в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC .
6. Точки A' , B' , C' — основания перпендикуляров из вершин A , B , C треугольника ABC на прямую ℓ . Докажите, что перпендикуляры из A' , B' , C' на BC , AC , AB пересекаются в одной точке.
7. Пусть ABC — равносторонний треугольник, P — произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников PAB , PBC и PCA на прямые AB , BC и CA соответственно, пересекаются в одной точке.
8. Дан описанный четырехугольник $ABCD$, в котором диагональ AC не является биссектрисой угла C . На этой биссектрисе отмечена точка E , такая, что AE и BD перпендикулярны. Точка F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на сторону BC . Докажите, что $AB = BF$.