

Разнобой – 7

1. Окружности s_1 и s_2 пересекаются в точке A . Через точку A проведена прямая, пересекающая s_1 в точке B , а s_2 в точке C . В точках B и C проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке D . Докажите, что угол $\angle BDC$ не зависит от выбора прямой, проходящей через A .
2. Натуральные числа $a, b, \frac{ab}{a-b}$ взаимно просты в совокупности. Докажите, что $a-b$ — точный квадрат.
3. Найдите все такие пары квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d$, что a и b — корни второго трёхчлена, c и d — корни первого.
4. (а) На плоскости провели несколько прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. По этим прямым ползет муравей, при этом он на каждом перекрестке поворачивает либо влево, либо вправо. Через некоторое время муравей прополз по тому отрезку прямой, по которому двигался ранее. Докажите, что он полз в том же направлении.
(б) Те же условия, только теперь муравей ползает по рёбрам планарного графа, все вершины которого имеют степень 4.
5. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.
6. Для положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n ($n > 4$) докажите неравенство

$$\frac{x_1^4}{x_2^4} + \frac{x_2^4}{x_3^4} + \dots + \frac{x_n^4}{x_1^4} \geq \frac{x_1}{x_5} + \frac{x_2}{x_6} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_3} + \frac{x_n}{x_4}.$$