

## Формула включений-исключений

1. В кружок робототехники берут только тех, кто знает математику, физику или программирование. Известно, что 8 членов кружка знают физику, 7 — математику, 11 — программирование. При этом известно, что не менее двоих знают одновременно физику и математику, не менее троих — математику и программирование, и не менее четырёх — физику и программирование. Какое **(а)** наименьшее; **(б)** наибольшее количество участников кружка может быть при этих условиях?
2. Куб со стороной 10 разбит на 1000 кубиков с ребром 1. В каждом кубике записано число, при этом сумма чисел в каждом столбике из 10 кубиков (в любом из трёх направлений) равна 0. В одном из кубиков (обозначим его через  $A$ ) записана единица. Через кубик  $A$  проходит три слоя, параллельных граням куба (толщина каждого слоя равна 1). Найдите сумму всех чисел в кубиках, не лежащих в этих слоях.
3. На столе площади 1 лежат три журнала, площади которых не меньше  $\frac{1}{2}$ . Петя подсчитал площадь пересечения первого и второго журнала, первого и третьего журнала, второго и третьего журнала, и сказал максимальное из этих трех чисел. Какое наименьшее число мог сказать Петя?

Пусть  $A$  и  $B$  — два множества,  $A \cup B$  и  $A \cap B$  — объединение и пересечение множеств  $A$  и  $B$  соответственно, и  $|A|$  — количество элементов в множестве  $A$ . Нетрудно понять, что верна формула

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Эту формулу можно можно обобщить на случай трёх множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Оказывается, что эти формулы обобщаются на случай произвольного числа множеств.

Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — произвольное семейство множеств. Введём обозначения

$$S = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

$$S_1 = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

$$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|$$

$$\vdots$$

$$S_n = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Формула включений-исключений утверждает, что

$$S = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n+1} S_n.$$

4. **(а)** Докажите, что для любого  $m$  выполнено  $C_m^1 - C_m^2 + \dots + (-1)^{m-1} C_m^m = 1$ .  
**(б)** Докажите формулу включений-исключений.

5. Петя и ещё 9 человек играют в такую игру: каждый бросает игральную кость (шестигранную). Игрок получает приз, если он выбросил число очков, которое не удалось выбросить никому больше.
- (а) Какова вероятность того, что Петя получит приз?
- (б) Какова вероятность того, что хоть кто-то получит приз?
6. Докажите, что для любых  $n, i$  ( $i \leq n$ ) выполнено
- (а)  $C_n^i - C_n^{i+1} + \dots + (-1)^{n+i} C_n^n \geq 0$ ;
- (б)  $S_i - S_{i+1} + S_{i+2} - \dots + (-1)^{i+n} S_n \geq 0$ .
- (в)  $S \geq S_1 - S_2 + \dots - S_i$  для чётных  $i$ , и  $S \leq S_1 - S_2 + \dots + S_i$  для нечётных  $i$ .
7. Кафтан площадью 1 покрыт пятью заплатами площадью  $1/2$  каждая. (а) Докажите, что найдутся две заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше чем  $3/20$ . (б) Докажите, что найдутся две заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше чем  $1/5$ .