Формула включений-исключений

1. Куб со стороной 10 разбит на 1000 кубиков с ребром 1. В каждом кубике записано число, при этом сумма чисел в каждом столбике из 10 кубиков (в любом из трёх направлений) равна 0. В одном из кубиков (обозначим его через A) записана единица. Через кубик A проходит три слоя, параллельных граням куба (толщина каждого слоя равна 1). Найдите сумму всех чисел в кубиках, не лежащих в этих слоях.

2. На столе площади 1 лежат три журнала, площади которых не меньше $\frac{1}{2}$. Петя подсчитал площадь пересечения первого и второго журнала, первого и третьего журнала, второго и третьего журнала, и сказал максимальное из этих трех чисел. Какое наименьшее число мог сказать Петя?

Пусть A и B — два множества, $A \cup B$ и $A \cap B$ — объединение и пересечение множеств A и B соответственно, и $|A|$ — количество элементов в множестве A. Нетрудно понять, что верна формула

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Эту формулу можно можно обобщить на случай трёх множеств A, B и C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Оказывается, что эти формулы обобщаются на случай произвольного числа множеств.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — произвольное семейство множеств. Введём обозначения

$$S = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

$$S_1 = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

$$S_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|$$

$$\vdots$$

$$S_n = |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Формула включений-исключений утверждает, что

$$S = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{n+1} S_n.$$

3. **(а)** Докажите, что для любого m выполнено $C_m^1 - C_m^2 + \ldots + (-1)^{m-1} C_m^m = 1$.
   (б) Докажите формулу включений-исключений.

4. Петя и ещё 9 человек играют в такую игру: каждый бросает игральную кость (шестигранную). Игрок получает приз, если он выбросил число очков, которое не удалось выбросить никому больше.

   (а) Какова вероятность того, что Петя получит приз?

   (б) Какова вероятность того, что хоть кто-то получит приз?

5. Докажите, что для любых n, i ($i \leqslant n$) выполнено

(а) $C_n^i - C_n^{i+1} + \ldots + (-1)^{n+i} C_n^n \geqslant 0$;

(б) $S_i - S_{i+1} + S_{i+2} - \ldots + (-1)^{i+n} S_n \geqslant 0$.

(в) $S \geqslant S_1 - S_2 + \ldots - S_i$ для чётных i, и $S \leqslant S_1 - S_2 + \ldots + S_i$ для нечётных i.

6. Кафтан площадью 1 покрыт пятью заплатами площадью 1/2 каждая. **(а)** Докажите, что найдутся две заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше чем 3/20. **(б)** Докажите, что найдутся две заплаты, пересечение которых имеет площадь не меньше чем 1/5.

7. **(а)** Для натуральных x, y, z комбинаторно докажите тождество

$$6xyz = (x+y+z)^3 - (x+y)^3 - (x+z)^3 - (y+z)^3 + x^3 + y^3 + z^3.$$

(б) Обобщите тождество на случай n переменных.