

Индукция в неравенствах

1. **Неравенство Бернулли.** Докажите, что $(1 + x)^n \geq 1 + xn$ при $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (-1, +\infty)$.

2. Для положительного a докажите неравенство

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}} \leq \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$$

3. Докажите, что при всех натуральных n выполнено неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

4. Докажите неравенство $2^n > n^3$ при натуральном $n \geq 10$.

5. Для натурального $n > 1$ докажите, что $n^n > (n + 1)^{n-1}$.

6. Докажите, что при любых положительных x_1, x_2, \dots, x_n ($n > 3$) выполняется неравенство

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geq 2.$$

7. Для натурального n докажите неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$