Индукция в неравенствах

1. Даны положительные числа a, b и натуральное n. Докажите неравенство

$$2^{n-1}\left(a^n + b^n\right) \geqslant (a+b)^n.$$

2. Докажите, что при всех натуральных n выполнено неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

3. Для натурального $n > 1$ докажите, что $n^n > (n+1)^{n-1}$.

4. **(а)** Докажите, что при любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 3)$ выполняется неравенство

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geqslant 2.$$

(б) Докажите, что это неравенство нельзя усилить, т.е. что для любого натурального $n > 3$ нельзя заменить двойку в правой части на большее число так, чтобы неравенство осталось верным.

5. Для натурального n докажите неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

6. **(а)** Для натурального $n \geqslant 2$ докажите неравенство

$$\sqrt{2\sqrt{3 \ldots \sqrt{n}}} \leqslant 3.$$

(б) Даны натуральные числа m, n и k, причём $m > n$. Сравните числа

$$\underbrace{\sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{m + \ldots}}}}_{k \text{ корней}} \quad \text{и} \quad \underbrace{\sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{n + \ldots}}}}_{k \text{ корней}}.$$