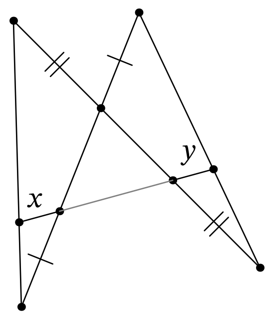
Теоремы Чевы и Менелая, практика

1. Через середину стороны BC треугольника ABC проведена прямая, пересекающая прямые AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что если $AP = AQ$, то $BP = CQ$.

2. В треугольнике ABC провели чевианы AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в одной точке. Обозначим A_2 точку, симметричную A_1 относительно середины стороны BC, аналогично определяются точки B_2 и C_2. Докажите, что чевианы AA_2, BB_2, CC_2 также пересекаются в одной точке.

3. Через точку внутри треугольника провели три чевианы. Оказалось, что длины шести отрезков, на которые они разбивают стороны треугольника, образуют в каком-то порядке геометрическую прогрессию. Докажите, что длины чевиан тоже образуют геометрическую прогрессию.

4. Посмотрите на картинку. Докажите, что $x = y$.



5. Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках C_1 и C_2, сторону BC — в точках A_1 и A_2, сторону CA — в точках B_1 и B_2. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то и прямые AA_2, BB_2, CC_2 также пересекаются в одной точке.

6. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AC = BD = AD$; точки E и F — середины AB и CD соответственно; O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Докажите, что EF проходит через точки касания вписанной окружности треугольника AOD с его сторонами AO и OD.

7. На высоте AH остроугольного треугольника ABC взята точка D. Прямые BD и CD пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что луч HA — биссектриса угла B_1HC_1.