

Перестановки

1. На урок физкультуры пришел класс из n человек и некоторым образом встал в шеренгу. Учитель физкультуры может попросить старосту класса поменяться с любым другим учеником местами. Докажите, что после нескольких таких просьб он сможет расставить ребят по росту.
2. В вершинах дерева из n элементов расставлены фишки с номерами $1, 2, \dots, n$. За ход разрешается менять местами фишки в вершинах, соединенных ребром. Доказать, что таким образом из любой расстановки фишек можно получить любую другую расстановку.
3. У Лены есть колода игральных карт и любимый способ её тасовать. Однажды Лена взяла колоду, в которой все карты идут по порядку, и старательно перетасовала её 52! раз (каждый раз одним и тем же способом). Докажите, что карты в колоде снова оказались разложены по порядку.
4. На конференцию по теории групп собрались n учёных. Организаторы напечатали для каждого бейджик с его именем, но раздали их учёным в перепутанном порядке. Доклады на конференции скучные, и поэтому в это время учёные могут переписываться, но не могут обмениваться бейджиками (это невежливо). За один перерыв между докладами каждый учёный может обменяться бейджиком с другим (но только один раз, перерыв короткий). Докажите, что учёные могут сделать так, чтобы к началу третьего доклада у каждого из них был правильный бейджик.
5. В ряд выложены 33 карточки с буквами от «А» до «Я». Робот умеет перекладывать их каким-то одним определённым способом, при этом надписи на карточках он не читает. Изначально карточки лежат в алфавитном порядке. Робота запустили 2002 раза, и на 2002 раз впервые все карточки одновременно вернулись на свои места. Докажите, что робота можно запустить ещё несколько раз так, чтобы на своих местах остались ровно 22 карточки из 33.
6. У Маши есть колода из 104 карточек, пронумерованных числами от 1 до 104, и любимый способ её тасовать. Однажды Маша взяла колоду, в которой карточки были выложены по возрастанию, и перетасовала её. Потом она решила, что этого недостаточно, и перетасовала колоду ещё раз (точно таким же способом). Могло ли так случиться, что в результате этого
 - (а) нижняя и верхняя карты поменялись местами, а все остальные оказались на изначальных местах?
 - (б) нижняя карта оказалась самой верхней, а порядок остальных 103 карт не изменился?
 - (в) колода упорядочилась по убыванию?
 - (г) верхние 52 карты «скрестились» с нижней половиной, то есть верхние карты с числами от 1 до 52 идут под чётными номерами в том же порядке, а карты с числами от 53 до 104 — под нечётными номерами также без изменения порядка?
7. Миша придумал комбинацию поворотов кубика Рубика, изменяющую его, а потом взял собранный кубик и повторил эту комбинацию поворотов (а) 101 раз; (б) 13 раз. Докажите, что он не мог получить собранный кубик.