

Счёт отрезков, эпизод первый

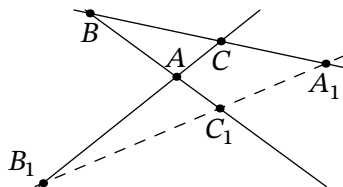
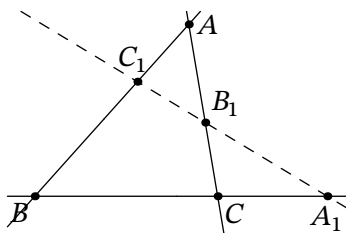
А мне считать, а мне считать,
А мне считать охота!

Песенка Водяного (почти)

На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC (или их продолжениях) лежат точки C_1 , A_1 , B_1 соответственно.

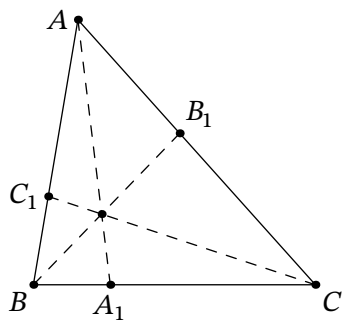
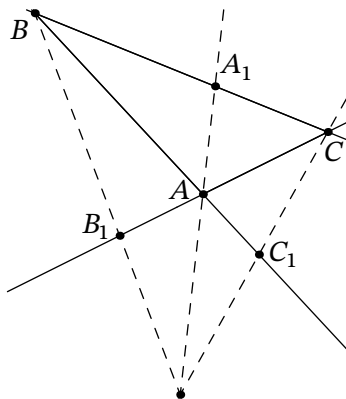
Теорема Менелая. Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой, если и только если выполнено соотношение

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -1.$$



Теорема Чевы. Прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (или параллельны), если и только если выполнено соотношение

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1.$$



- (а) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с соответствующими точками касания вписанной окружности со сторонами треугольника, пересекаются в одной точке (*точка Жергонна*).

(б) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с соответствующими точками касания трёх внеписанных окружностей со сторонами треугольника, пересекаются в одной точке (*точка Нагеля*).
- Докажите, что основания внешних биссектрис неравностороннего треугольника лежат на одной прямой.
- Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Биссектриса угла ABD пересекает диагональ AC в точке E , а биссектриса угла ACD — диагональ BD в точке F . Докажите, что прямые AF и DE пересекаются на медиане треугольника APD .
- Вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 . Внеписанная окружность касается продолжения стороны BC за точку C в точке A_1 . Докажите, что A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.
- Докажите, что в произвольном треугольнике три прямые, каждая из которых проходит через середину высоты и середину стороны, на которую эта высота опущена, пересекаются в одной точке.
- Точки E и F на сторонах CD и AD параллелограмма $ABCD$ таковы, что $BE = BC, BF = BA$. Докажите, что касательная к (BEF) в точке B, EF и AC пересекаются в одной точке.
- На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1 . Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке D . Пусть a_1, b_1, c, d — расстояния от точек A_1, B_1, C, D до прямой AB . Докажите, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$