

## Рациональное и иррациональное

1. Является ли рациональным число

(а)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ;

(б)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ ;

(в)  $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ ?

2. Натуральные числа  $m$  и  $n$  таковы, что число

$$\sqrt{m} + \sqrt[3]{n}$$

является целым. Докажите, что оба слагаемых — целые.

3. Трёхчлен  $x^2 + px + q$  с рациональными коэффициентами имеет число  $1 + \sqrt{3}$  в качестве одного из корней. Чему может быть равен второй корень?
4. Артемий задумал вещественные числа  $a, b, c$  и заметил, что числа  $a + bc, b + ac, c + ab$  рациональны, а  $a^2 + b^2 = 1$ . Докажите, что число  $abc^2$  также рационально.
5. Лена нарисовала пустую таблицу  $50 \times 50$  и написала сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём ровно 50 из них рациональные. Затем в каждую клетку таблицы она записала произведение чисел, написанных около её строки и столбца. Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
6. Дано бесконечное множество вещественных чисел  $S$ . Известно, что  $S$  есть иррациональное число. Докажите, что для любого натурального  $n$  можно выбрать  $n$  различных элементов  $S$  с иррациональной суммой.
7. Клетки таблицы  $2 \times 2025$  надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2025 вещественных чисел, среди которых нет двух равных, а в нижней — те же 2025 чисел, но в другом порядке. В каждом из 2025 столбцов должны быть записаны два различных числа, сумма которых должна быть рациональной. Какое наибольшее количество иррациональных чисел может быть в верхней строке таблицы?