Рациональное и иррациональное

1. Трёхчлен $x^2 + px + q$ с рациональными коэффициентами имеет число $1 + \sqrt{3}$ в качестве одного из корней. Чему может быть равен второй корень?

2. Лена нарисовала пустую таблицу 50×50 и написала сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём ровно 50 из них рациональные. Затем в каждую клетку таблицы она записала произведение чисел, написанных около её строки и столбца. Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

3. Дано бесконечное множество вещественных чисел S. Известно, что не все числа множества S рациональны. Докажите, что для любого натурального n можно выбрать n различных элементов S с иррациональной суммой.

4. Клетки таблицы 2×2025 надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2025 вещественных чисел, среди которых нет двух равных, а в нижней – те же 2025 чисел, но в другом порядке. В каждом из 2025 столбцов должны быть записаны два различных числа, сумма которых должна быть рациональной. Какое наибольшее количество иррациональных чисел может быть в верхней строке таблицы?

5. Дано вещественное число α. Оказалось, что

$$\frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha} \in \mathbb{Q}.$$

Докажите, что

$$\frac{\alpha^4 + \alpha^2 + 1}{\alpha^2} \in \mathbb{Q}.$$

6. Десять попарно различных чисел таковы, что для каждых двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение – рациональное число. Докажите, что квадраты всех этих чисел рациональны.

7. **(а)** Найдите первые 100 знаков после запятой числа $\left(6 + \sqrt{35}\right)^{2025}$.

(б) Существуют ли такие натуральные числа n и m, что

$$\left(3 + 5\sqrt{2}\right)^n = \left(5 + 3\sqrt{2}\right)^m\ ?$$