

Простые задачи

1. Клетки таблицы 15×15 покрашены в три цвета. Докажите, что можно выбрать некоторый цвет и две строки так, чтобы в них было одинаковое количество клеток этого цвета.
2. В некоторой компании 25 акционеров, причём любые 15 из них владеют не менее, чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?
3. В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно три фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?
4. В четырёхугольнике $ABCD$ выполнены равенства $\angle B = \angle D = 90^\circ$ и $AC = BC + DC$. На луче BD выбрана точка P так, что $BP = AD$. Докажите, что прямая CP параллельна биссектрисе угла ABD .
5. Найдите все натуральные a, b, c такие, что число $ab + ac + bc$ — простое и $\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a}$.
6. Артемий и Ваня играют в игру. Изначально Артемий ставит на угловую клетку доски 2×2023 фишку, а затем сдвигает её на соседнюю по стороне клетку, далее Ваня сдвигает фишку на соседнюю по стороне клетку. После этого Артемий всегда сдвигает фишку на соседнюю клетку 2 раза за ход, а Ваня — 1 раз. Нельзя ставить фишку на клетку, которая уже была посещена ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков выигрывает независимо от действий соперника?
7. Миша записал несколько алгебраических выражений (многочленов от нескольких переменных), возвёл каждое из них в квадрат и сложил результаты. Могло ли у него получиться выражение $x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4x + xz + 1$?