

Фантастические твари допостроения и где они обитают

1. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC . Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB + \angle BAC$. Докажите, что $AB + CL = AC$.
2. Точка M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$, а точки E и F — основания высот треугольника ABM , опущенных из вершин A и B соответственно. Докажите, что $DE = CF$.
3. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и F соответственно, E — середина отрезка DF . Докажите, что $BE + CE \geq BD + CF$.
4. В правильном треугольнике ABC точка O такова, что $\angle AOC = 113^\circ$, $\angle BOC = 123^\circ$. Найдите углы треугольника, сложенного из отрезков AO , BO и CO .
5. Внутри параллелограмма $ABCD$ расположена точка X . Докажите, что если $\angle XAB = \angle XCB$, то $\angle XBC = \angle XDC$.
6. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD такова, что $\angle ABC = 90^\circ$. Биссектриса угла BAD пересекает отрезок BC в точке P . Оказалось, что $\angle APD = 45^\circ$. Докажите, что площади четырёхугольника $APCD$ и треугольника ABP равны.
7. Внеписанная окружность прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) касается стороны BC в точке A_1 , а прямой AC — в точке A_2 . Луч A_2A_1 пересекает первый раз окружность, вписанную в треугольник ABC , в точке A' . Аналогично определяется точка C' . Докажите, что $AC \parallel A'C'$.