Фантастические ... и где они обитают

1. Точка M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$, а точки E и F — основания высот треугольника ABM, опущенных из вершин A и B соответственно. Докажите, что $DE = CF$.

2. Диагонали AD и BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке P. Известно, что $AC = CE = AE$, $\angle APB = \angle ACE$ и $AB + BC = CD + DE$. Докажите, что $AD = BE$.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ расположена точка X. Докажите, что если $\angle XAB = \angle XCB$, то $\angle XBC = \angle XDC$.

4. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD такова, что $\angle ABC = 90°$. Биссектриса угла BAD пересекает отрезок BC в точке P. Оказалось, что $\angle APD = 45°$. Докажите, что площади четырёхугольника $APCD$ и треугольника ABP равны.

5. Окружность ω, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), касается сторон BC и AC в точках D и E соответственно. На стороне BC отмечена точка G, а на стороне AC — точка H так, что $BG = CD$, $AH = CE$. Отрезки DH и GE пересекаются в точке M. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников HEM и GDM лежит на ω.

6. Из точки E, лежащей на медиане AD треугольника ABC, опущен перпендикуляр EF на сторону BC. Из точки M, лежащей на прямой EF, опущены перпендикуляры MN и MP на стороны AC и AB соответственно. Оказалось, что точки N, E и P лежат на одной прямой. Докажите, что точка M лежит на биссектрисе угла BAC.

7. Пусть M — точка пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника, N — точка пересечения его средних линий (отрезков, соединяющих середины противоположных сторон), а O — центр описанной окружности. Докажите, что $OM \geqslant ON$.