

Комбинаторный разнобой

1. На доске 100×100 расставлено 100 ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что в правом верхнем и в левом нижнем квадратах размером 50×50 расставлено равное число ладей.
2. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трёх получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 668.
3. За круглым столом сидят 40 человек. У каждых двух, между которыми сидит нечётное число человек, нет общих знакомых. Какое наибольшее количество пар знакомых может быть в этой компании?
4. На доске 8×8 стоят 50 фишек. Если в каком-то квадрате 2×2 стоит всего одна фишка, то её можно убрать. Докажите, что за несколько таких ходов убрать все фишки с доски не удастся.
5. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Лена и Ваня по очереди берут по одной карточке, пока все карточки не будут разобраны. Лена берет первой и хочет добиться того, чтобы сумма чисел на её карточках делилась на 25. Ваня хочет этому помешать. Сможет ли Лена добиться своей цели?
6. На экзамен пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задаёт каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получают оценку «сдал» к концу экзамена?». В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: «сдал» или «не сдал».

После того, как все студенты получают оценку, придет инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку «не сдал». Если хотя бы один такой студент найдётся, то преподаватель будет отстранен от работы, а оценки всех студентов заменят на «сдал». В противном случае никаких изменений не произойдёт. Придумайте стратегию, которая гарантирует всем студентам оценку «сдал».

7. В государстве 100 городов. Требуется соединить некоторые пары городов авиарейсами так, чтобы от любого города можно было бы долететь (возможно, с пересадками) до любого другого и чтобы для любых четырех городов A, B, C, D , для которых есть рейсы AB, BC, CD , был и рейс AD . Сколько существует способов это сделать?