Тренировочная олимпиада. Регион ВсОШ

Задача 1. По кругу выписано 30 ненулевых цифр. Любые две соседние цифры можно прочесть по часовой стрелке как двузначное число. Рассмотрим эти 30 двузначных чисел, образованных соседними цифрами. Может ли их произведение быть удвоенным точным квадратом?

Ответ: Да, может.

Решение. Поставим в круг 29 единиц и 1 восьмёрку

$$\ldots 11811 \ldots$$

Тогда произведение двузначных чисел будет равно $11^{28} \cdot 18 \cdot 81 = 2 \cdot (11^{14} \cdot 27)^2$, что является удвоенным квадратом натурального числа.

Отметим, что существуют и другие подходящие расстановки (например, … 11212211 …). □

Задача 2. Даны два приведённых квадратных трёхчлена $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$, у каждого есть по два действительных корня. Оказалось, что эти четыре корня в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию. Какие значения может принимать дискриминант первого трёхчлена, если дискриминант второго равен 7?

Ответ: 7, 63, 7/9.

Решение. Дискриминант приведённого квадратного трёхчлена — это квадрат разности между его корнями. В этом легко убедиться, напрямую подставив формулу для корней:

$$x_2 - x_1 = \frac{-a + \sqrt{D}}{2} - \frac{-a - \sqrt{D}}{2} = \sqrt{D}.$$

Обозначим корни одного из трёхчленов через x_1 и x_2, второго — через y_1 и y_2; их дискриминанты обозначим через D_1 и D_2 соответственно. Есть три случая, в каком порядке могут идти эти корни в прогрессии (с точностью до перестановок корней и трёхчленов):

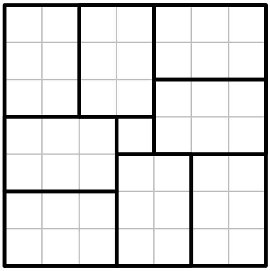
- $x_1 < x_2 < y_1 < y_2$;
- $x_1 < y_1 < x_2 < y_2$;
- $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$;

В арифметической прогрессии разности между парами соседних элементов одинаковые. Используя этот факт, замечаем, что в первых двух случаях $|x_2 - x_1| = |y_2 - y_1|$, поэтому $D_1 = D_2$. В третьем случае $|x_2 - x_1| = 3 \cdot |y_2 - y_1|$, поэтому $D_1 = 9 \cdot D_2$. По условию один из дискриминантов равен $D = 7$, поэтому второй дискриминант — это либо D, либо $D \cdot 9$, либо $D/9$. Подставляем $D = 7$, получаем три возможных значения, для каждого из которых нетрудно привести пример. □

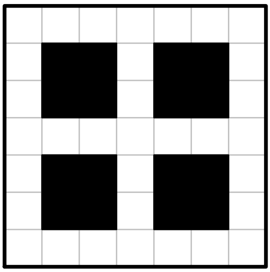
Задача 3. Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

Ответ: 16

Решение. *Оценка.* В каждом прямоугольнике 2×3 должно быть хотя бы два детектора: прямоугольник состоит из трёх доминошек 1×2, и если детектор в крайней доминошке, мы можем не понять, есть ли корабль на двух других доминошках, а если детектор в средней доминошке, мы можем не понять, какую из крайних доминошек занимает корабль вместе со средней доминошкой. Поэтому всего должно быть не менее 16 детекторов (см. рис.).

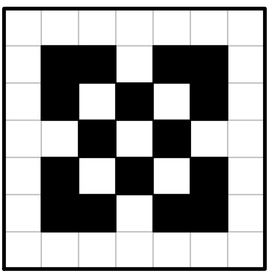


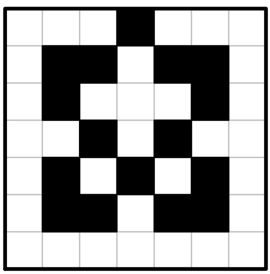
Пример. На рисунке ниже чёрным указано расположение 16 детекторов. Всякий корабль пересекается ровно с одним чёрным квадратом 2×2 по одной клетке, по двум соседним или по всем четырём. В любом случае однозначно определяется положение корабля или его отсутствие.



□

Замечание. 16 детекторов можно расположить только тремя принципиально различными способами. Один указан в решении, остальные два см. на рисунке ниже.





Задача 4. Обозначим через $d(k)$ количество натуральных делителей натурального числа k. Докажите, что для каждого натурального n

$$d(1) + d(3) + d(5) + \ldots + d(2n-1) < d(2) + d(4) + d(6) + \ldots + d(2n).$$

Решение. Обозначим $d'(k)$ количество **собственных** делителей натурального числа k (напомним, что делитель числа k называется собственным, если он строго меньше k). Очевидно, что $d'(k) = d(k) - 1$, поэтому неравенство из условия равносильно неравенству

$$d'(1) + d'(3) + \ldots + d'(2n-1) < d'(2) + d'(4) + \ldots + d'(2n). \tag{1}$$

Пусть m — некоторое натуральное число. Заметим, что среди чисел $1, 3, \ldots, 2n-1$ количество тех чисел, для которых m является собственным делителем, не превосходит количества чисел, для которых m является собственным делителем, среди чисел $2, 4, \ldots, 2n$. В самом деле, если число m чётно, то это очевидно. Если число m нечётно, то любое нечётное число, не превосходящее $2n-1$ и имеющее m в качестве собственного делителя, можно представить в виде $m \cdot l$, где $l > 1$ нечётно. Но тогда число $m(l-1)$ чётно, не превосходит $2n$ и также имеет m в качестве собственного делителя.

Значит, любое натуральное m возникает в качестве собственного делителя слагаемого в левой части неравенства (1) не больше раз, чем в правой. Тогда левая часть не больше правой. Осталось заметить, что число 1 является собственным делителем всех чисел $2, 4, \ldots, 2n$, но не является собственным делителем самого себя, поэтому знак неравенства строгий. $\square$

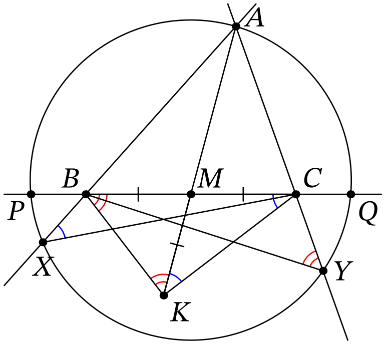
Задача 5. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC выбраны такие точки X и Y соответственно, что $2\angle CXA = \angle CMA$ и $2\angle AYB = \angle AMB$. Прямая BC пересекает окружность, описанную около треугольника AXY в точках P и Q, причём P, B, C, и Q лежат на прямой BC именно в таком порядке. Докажите, что $PB = QC$.

Решение. Заметим, что для решения задачи достаточно проверить, что степени точек B и C относительно окружности, описанной около треугольника AXY, равны. Поскольку $PB \cdot BQ = BA \cdot BX$, $CQ \cdot CP = CA \cdot CY$, то достаточно доказать, что $AC \cdot CY = AB \cdot BX$.

На продолжении луча AM за точку M отметим точку K так, что $MK = BM = MC$. Тогда треугольники MCK и MBK — равнобедренные. Обозначим $\angle AMC = 2\varphi$. По условию $\angle AXC = \varphi$, $\angle AYB = 90^\circ - \varphi$. Поскольку треугольники MKC, MBK — равнобедренные, то $\angle AKC = \varphi = \angle AXC$ и $\angle AKB = 90^\circ - \varphi = \angle AYB$. Таким образом, получаем, что четырёхугольники $ACKX$ и $ABKY$ — вписанные. Обозначим окружности. описанные около $ACKX$ и $ABKY$ через ω_1 и ω_2 соответственно.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть F и E — вторые точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2 с прямой BC соответственно. Тогда, считая степень точки M относительно ω_1 и ω_2, находим $MC \cdot MF = MA \cdot MK = MB \cdot ME$. Так как $MB = MK = MC$, получаем, что $MF = MA = ME$. Тогда $BF = MF - MB = ME - MC = CE$. Наконец, считая степени точек B и C относительно ω_1 и ω_2 соответственно, получаем $BA \cdot BX = BM \cdot BF = CM \cdot CE = CA \cdot CY$, что и требовалось.



Второй способ. Из найденных вписанностей следуют равенства углов $\angle KXB = \angle KCY$, $\angle KBX = \angle KYA$. Значит, треугольники KXB и KCY подобны. Заметим, что площади треугольников ABK и ACK равны, поскольку AK проходит через середину M отрезка BC. Значит,

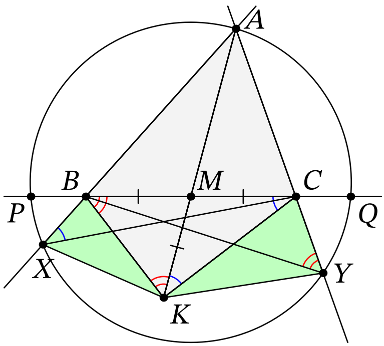
$$1 = \frac{S_{ABK}}{S_{ACK}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BK \cdot \sin \angle ABK}{\frac{1}{2} AC \cdot CK \cdot \sin \angle ACK}.$$

Из этого соотношения находим

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CK \sin \angle ACK}{BK \sin \angle ABK} = \frac{CK \sin \angle KCY}{BK \sin \angle XBK} = \frac{CK}{BK} \cdot \frac{\sin \angle KXB}{\sin \angle XBK} = \frac{CK}{BK} \cdot \frac{BK}{KX} = \frac{CK}{KX} = \frac{CY}{BX}.$$

Здесь третье равенство с конца следует из теоремы синусов для $\triangle BKX$, а последнее — из полученного выше подобия $\triangle KBX \sim \triangle KYC$.

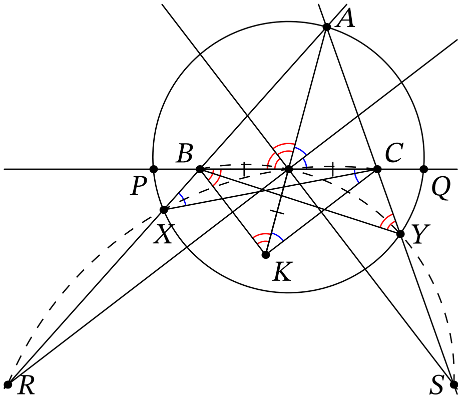
Полученное равенство $\frac{AB}{AC} = \frac{CY}{BX}$ равносильно требуемому $AB \cdot BX = AC \cdot CY$.



Третий способ. Пусть биссектрисы углов $\angle AMC$ и $\angle AMB$ пересекают AB и AC в точках R и S соответственно. Тогда из равенств углов $\angle BMR = \varphi = \angle BXC$, $\angle CMS = 90° - \varphi = \angle CYB$ следует, что четырёхугольники $RXMC$ и $SYMB$ — вписанные. Записывая степени точек B и C относительно описанных около этих четырёхугольников окружностей, получаем $BX \cdot BR = BM \cdot MC$, $CM \cdot CB = CY \cdot CS$. Значит, $BX \cdot BR = CY \cdot CS$. То есть $\frac{CY}{BX} = \frac{BR}{CS}$. По основному свойству биссектрисы

$$\frac{AB}{BR} = \frac{AR}{BR} - 1 = \frac{AM}{BM} - 1 = \frac{AM}{CM} - 1 = \frac{AS}{CS} - 1 = \frac{AC}{CS},$$

то есть $\frac{BR}{CS} = \frac{AB}{AC}$, что завершает решение задачи.


A
B
C
P
Q
X
Y
K
R
S

□