Тренировочная олимпиада. Регион ВсОШ

Задача 1. По кругу выписано 30 ненулевых цифр. Любые две соседние цифры можно прочесть по часовой стрелке как двузначное число. Рассмотрим эти 30 двузначных чисел, образованных соседними цифрами. Может ли их произведение быть удвоенным точным квадратом?

Задача 2. Даны два приведённых квадратных трёхчлена $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$, у каждого есть по два действительных корня. Оказалось, что эти четыре корня в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию. Какие значения может принимать дискриминант первого трёхчлена, если дискриминант второго равен 7?

Задача 3. Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

Задача 4. Обозначим через $d(k)$ количество натуральных делителей натурального числа k. Докажите, что для каждого натурального n

$$d(1) + d(3) + d(5) + \ldots + d(2n-1) < d(2) + d(4) + d(6) + \ldots + d(2n).$$

Задача 5. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На лучах AB и AC выбраны такие точки X и Y соответственно, что $2\angle CXA = \angle CMA$ и $2\angle AYB = \angle AMB$. Прямая BC пересекает окружность, описанную около треугольника AXY в точках P и Q, причём P, B, C, и Q лежат на прямой BC именно в таком порядке. Докажите, что $PB = QC$.