Тренировочная олимпиада. Регион Эйлера

Задача 1. Ненулевые вещественные числа a и b удовлетворяют условию

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}=1.$$

Какие значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{1}{ab}?$$

Ответ: 1

Решение. Приведя равенство из условия к общему знаменателю, получаем, что

$$a^2+b^2=ab+1.$$

Искомое выражение равно

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{1}{ab}=\frac{a^2+b^2-1}{ab}=\frac{ab}{ab}=1.$$

□

Задача 2. Среди участников кругового шахматного турнира мальчиков втрое больше, чем девочек. Ничьих не было, а в сумме мальчики набрали столько же очков, сколько и девочки. Кто занял первое место: мальчик или девочка?

Напомним, что в круговом турнире каждый участник играет с любым другим участником ровно одну партию.

Ответ: Девочка.

Решение. Обозначим k число девочек, принимающих участие в турнире. Тогда в турнире играло $3k$ мальчиков. Приведём два способа решения задачи.

Первый способ. Всего было сыграно

$$\frac{4k(4k-1)}{2}=2k(4k-1)$$

партий. Поскольку девочки и мальчики набрали одинаковое число очков, девочки набрали ровно $k(4k-1)$ очков (считаем, что победа в партии даёт 1 очко). Значит, какая-то девочка набрала хотя бы $4k-1$ очков. Такое могло быть, только если она выиграла все свои партии, тем самым заняв первое место.

Второй способ. Между собой мальчики сыграли ровно

$$\frac{3k(3k-1)}{2}$$

партий, и тем самым набрали суммарно не менее $3k(3k-1)/2$ очков. Тогда количество партий, в которых участвовала хотя бы одна девочка, равно

$$\frac{4k(4k-1)}{2}-\frac{3k(3k-1)}{2}=\frac{7k^2-k}{2}.$$

Значит, суммарно девочки набрали не более $(7k^2-k)/2$ очков. Таким образом, выполнено неравенство

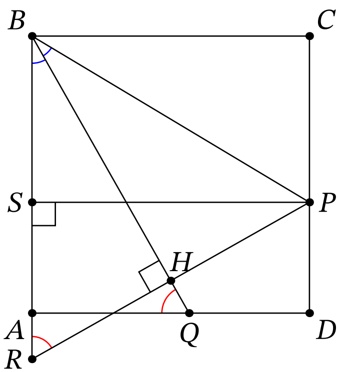
$$\frac{7k^2-k}{2}\geqslant\frac{9k^2-3k}{2},$$

откуда $k\geqslant k^2$, то есть $k=1$.

Значит, в турнире принимали участие три мальчика и одна девочка. Мальчики набрали суммарно хотя бы три очка, а девочка — не более трёх. Значит, на самом деле и те, и другие набрали суммарно ровно три очка. Такое могло быть, только если девочка выиграла все свои партии. Таким образом, первое место заняла девочка. □

Задача 3. На стороне CD квадрата $ABCD$ выбрана точка P. Точка Q на стороне AD такова, что BQ — биссектриса угла PBA. Из точки Р на BQ опущен перпендикуляр PH. Докажите, что $BQ=2PH$.

Решение. Продлим отрезок PH до пересечения с AB в точке R и опустим перпендикуляр PS из точки P на AB. Заметим, что BH является в треугольнике PBR биссектрисой и высотой, а значит и медианой. То есть $RH=PH$. Также заметим, что $\angle PRS=180°-\angle PRA=\angle BQA$. Тогда треугольники PSR и BAQ равны по катету ($PS=AB$) и всем углам. Значит, $2PH=PR=BQ$, что и требовалось доказать.

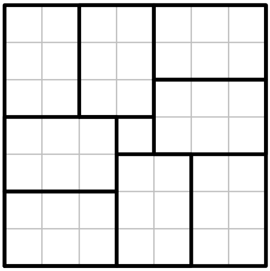


□

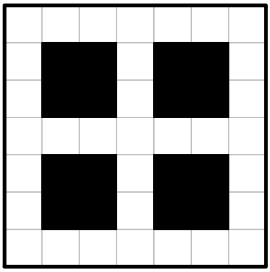
Задача 4. Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

Ответ: 16

Решение. *Оценка.* В каждом прямоугольнике 2×3 должно быть хотя бы два детектора: прямоугольник состоит из трёх доминошек 1×2, и если детектор в крайней доминошке, мы можем не понять, есть ли корабль на двух других доминошках, а если детектор в средней доминошке, мы можем не понять, какую из крайних доминошек занимает корабль вместе со средней доминошкой. Поэтому всего должно быть не менее 16 детекторов (см. рис.).

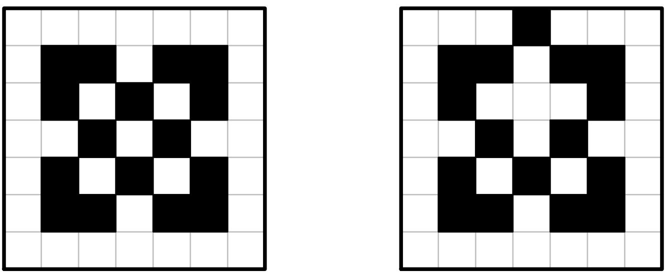


Пример. На рисунке ниже чёрным указано расположение 16 детекторов. Всякий корабль пересекается ровно с одним чёрным квадратом 2×2 по одной клетке, по двум соседним или по всем четырём. В любом случае однозначно определяется положение корабля или его отсутствие.



□

Замечание. 16 детекторов можно расположить только тремя принципиально различными способами. Один указан в решении, остальные два см. на рисунке ниже.



Задача 5. Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел (m, n), что m и n имеют одинаковые наборы простых делителей, и $m - 1$ и $n - 1$ также имеют одинаковые наборы простых делителей.

Решение. Для произвольного натурального $k > 1$ подойдут числа $n = 2^k - 1$ и $m = (2^k - 1)^2$. Первое требуемое условие выполнено, поскольку $n = m^2$. Второе требуемое условие следует из того, что

$$\begin{aligned}
&n - 1 = 2^{k-1} - 2,\\
&m - 1 = (2^k - 1)^2 - 1 = (2^k - 2) \cdot 2^k = 2^k(n - 1).
\end{aligned}$$

□