Тренировочная олимпиада. Регион Эйлера

Задача 1. Ненулевые вещественные числа a и b удовлетворяют условию

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = 1.$$

Какие значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{1}{ab}?$$

Задача 2. Среди участников кругового шахматного турнира мальчиков втрое больше, чем девочек. Ничьих не было, а в сумме мальчики набрали столько же очков, сколько и девочки. Кто занял первое место: мальчик или девочка?

Напомним, что в круговом турнире каждый участник играет с любым другим участником ровно одну партию.

Задача 3. На стороне CD квадрата $ABCD$ выбрана точка P. Точка Q на стороне AD такова, что BQ — биссектриса угла PBA. Из точки P на BQ опущен перпендикуляр PH. Докажите, что $BQ = 2PH$.

Задача 4. Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

Задача 5. Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел (m, n), что m и n имеют одинаковые наборы простых делителей, и $m - 1$ и $n - 1$ также имеют одинаковые наборы простых делителей.