Диагностическая работа. Очный этап.

Задача 1. Петя и Вася проводят матч, состоящий из нескольких партий. Победитель партии получает 4 очка, проигравший — одно очко, а если партия закончилась вничью, то оба получают по 2 очка. По окончании матча у ребят вместе оказалось 170 очков. Мог ли победитель набрать 90 очков?

Ответ: Не мог.

Решение. Разность между количеством очков Пети и Васи после каждой результативной партии меняется на 3, а после ничейной — не меняется. Так как вначале она равна 0, то после любого числа партий должна делиться на 3. А если бы Петя набрал 90 очков, то Вася набрал бы 80, и разность не делилась бы на 3. □

Задача 2. Найдите все натуральные k, l, m, n, для которых верно равенство

$$\frac{1}{k!} + \frac{1}{l!} + \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!}.$$

Ответ: (3, 3, 3, 2)

Решение. Не умаляя общности, будем считать, что $m \geqslant l \geqslant k$. Очевидно, $n \leqslant k$. Пусть $n \leqslant k - 2$. Тогда каждое из чисел $k!, l!, m!$ больше числа $n!$ по крайней мере в $(n+1)(n+2) \geqslant 6$ раз, и сумма обратных им чисел меньше $1/n!$. Значит, $n = k - 1$. Пусть $n \geqslant 3$. Тогда каждое из чисел $k!, l!, m!$ больше числа $n!$ по крайней мере в $n + 1 \geqslant 4$ раза, и сумма обратных им чисел снова меньше $1/n!$. Значит, $n = 1$ или $n = 2$.

Пусть $n = 1$. Тогда $k = 2$, и уравнение из условия сводится к уравнению $1/l! + 1/m! = 1/2$. Тут, как легко видеть, решений нет. Пусть $n = 2$. Тогда $k = 3$, и уравнение из условия сводится к уравнению $1/l! + 1/m! = 1/3$. Тут, очевидно, подходят только $l = m = 3$. □

Задача 3. Дан неравнобедренный треугольник ABC. На его сторонах AB и BC отмечены точки K и L такие, что прямые KL и AC параллельны. Отрезки AL и KC пересекаются в точке S. Известно, что $AK = AS$ и $KL = LC$. Докажите,что $AL = KB$.

Решение. Пусть $\angle AKS = \alpha$, $\angle LKC = \beta$. Тогда $\angle ASK = \alpha$, так как треугольник AKS — равнобедренный. Углы LSC и ASK равны как вертикальные, а $\angle LCK = \angle LKC = \beta$, поскольку треугольник LKC — равнобедренный. Так как $KL \,||\, AC$, то $\angle ACS = \beta$. Из треугольников AKC и LSC получаем, что $\angle CAK = 180° - \alpha - \beta$, $\angle SLC = 180° - \alpha - \beta$. Таким образом, $\angle CAK = \angle ALC$. Заметим, что $\angle LKB = \angle CAK$, $\angle ACL = \angle KLB$, так как $KL \,||\, AC$. Значит, треугольники ALC и BKL равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $AL = KB$. □

Задача 4. *Уголком* назовём фигуру, которая получается вырезанием из квадрата $n \times n$ квадрата $(n-1)\times(n-1)$ при любом натуральном n (одна клеточка — тоже уголок). На какое наименьшее количество уголков можно разрезать квадрат 100×100?

Ответ: 100

Решение. *Пример* на 100 уголков легко строится (например, из последовательно вложенных уголков со сторонами $1, 2, \ldots, 100$).

Оценка. Если уголков меньше 100, то есть горизонталь, на которой не лежит ни одной горизонтальной части уголка. Но тогда в ней лежит не более одной клетки каждого из уголков, и уголков должно быть не меньше 100 — противоречие. □

Задача 5. Лена выписала в тетрадь все наборы различных натуральных чисел с суммой 2024. Найдите такой набор с наибольшим возможным произведением.

Ответ: $2, 3, 4, \ldots, 54, 56, 57 \ldots, 64$

Решение. Обозначим a и b наименьшее и наибольшее число, входящее в набор с максимальным произведением, соответственно.

Сначала покажем, что все натуральные числа, лежащие между a и b, кроме, может быть, одного, входят в этот набор. Предположим противное, тогда обозначим c и d наименьшее и наибольшее натуральное число из промежутка $[a, b]$, не участвующее в наборе. Числа $c-1$ и $d+1$ входят в рассматриваемый набор, заменим их на числа c и d (сумма от этого не изменится). Так как

$$(c-1)(d+1) = cd - d + c - 1 < cd,$$

то произведение всех чисел в наборе увеличится — противоречие.

Теперь покажем, что $a = 2$ или $a = 3$.

Если $a = 1$, то можно выкинуть число a из набора, а число b заменить на $b+1$, увеличив произведение. Если $a \geqslant 5$, то можно заменить в наборе число a на пару чисел 2 и $a-2$, также увеличив произведение. Если $a = 4$ и следующее в наборе число равно 5, то его можно заменить на числа 2 и 3, увеличив произведение. Наконец, если следующее в наборе число равно 6 (то есть число 5 в наборе отсутствует), то можно заменить число 6 на числа 1, 2 и 3, не уменьшив произведение, и повторить рассуждения выше. Таким образом, $a = 2$ и $a = 3$.

Предположим, выкинутое число равно m ($m = 0$, если такого числа нет). Тогда сумма всех чисел набора равна

$$a + (a+1) + \ldots + b - m = \frac{b^2 - a^2 + b + a}{2} - m.$$

Если $a = 2$, то получаем, что $\frac{b(b+1)}{2} - m - 1 = 2024$. Так как $m < b$ и

$$\frac{63 \cdot 64}{2} = 2016 < 2024 < \frac{64 \cdot 65}{2} = 2080,$$

то $b = 64$, $m = 55$. Произведение всех чисел в наборе равно $\frac{64!}{55}$.

Если же $a = 3$, то аналогичные рассуждения показывают, что $b = 63, m = 53$, а произведение чисел в наборе равно $\frac{64!}{2 \cdot 53}$.

Значит, наибольшее произведение достигается для набора $2, 3, \ldots, 54, 56, 57, \ldots, 64$. □

Задача 6. Дан треугольник ABC. На стороне AB как на основании построен во внешнюю сторону равнобедренный треугольник ABC' с углом при вершине $120°$, а на стороне AC построен во внутреннюю сторону правильный треугольник ACB'. Точка K — середина отрезка BB'. Найдите углы треугольника KCC'.

Ответ: $30°, 60°, 90°$

Решение. Пусть C'' — вершина параллелограмма $B'C'BC''$. Тогда $B'C'' = BC' = AC'$, $B'C = AC$ и $\angle CB'C'' = \angle CAC'$, поскольку угол между прямыми $C''B'$ и AC' равен углу $\angle BC'A = 60°$. Следовательно, треугольники $C''B'C$ и $C'AC$ равны, причём угол между их соответственными сторонами $C''C$ и $C'C$ равен $60°$ (см. рис.). Значит, треугольник $CC'C''$ — равносторонний, а так как K — середина $C'C''$, то $CK \perp C'K$ и $\angle C'CK = 30°$. □