(не)Разнобой по ТЧ

1. На доску выписаны 2025 чисел. Оказалось, что сумма любых трех выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?

2. Артемий задумал три простых числа q_1, q_2, q_3 и заметил, что

$$q_1^4 - 1 \,\vdots\, q_2q_3, \quad q_2^4 - 1 \,\vdots\, q_3q_1, \quad q_3^4 - 1 \,\vdots\, q_1q_2.$$

Чему могут быть равны q_1, q_2, q_3?

3. Найдите все неотрицательные числа $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a + b = c^2 \\ b + c = d^2 \\ c + d = e^2 \\ d + e = a^2 \\ e + a = b^2 \end{cases}$$

4. На доску выписаны все натуральные числа от 1 до k. Маша хочет разбить все выписанные числа на две группы и записать в тетрадку числа каждой группы подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа. Существует ли такое k, при котором Маша сможет справиться с этой задачей?

5. Дано $2n - 1$ попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n - 1)^2$. Докажите, что среди них обязательно есть простое число.

6. В каждой вершине правильного 100-угольника записали по одному натуральному числу, причём все записанные числа различны. Вадим разделил каждое из них с остатком на следующее по часовой стрелке; оказалось, что остатки, полученные Вадимом, принимают всего два различных значения. Лена разделила каждое из чисел с остатком на следующее против часовой стрелки. Докажите, что все остатки, полученные Леной, различны.

7. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ число

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

не является целым.