

Принцип крайнего в ТЧ

1. Артемий задумал три простых числа q_1, q_2, q_3 и заметил, что

$$q_1^4 - 1 : q_2 q_3, \quad q_2^4 - 1 : q_3 q_1, \quad q_3^4 - 1 : q_1 q_2.$$

Чему могут быть равны q_1, q_2, q_3 ?

2. На доску выписаны все натуральные числа от 1 до k . Маша хочет разбить все выписанные числа на две группы и записать в тетрадку числа каждой группы подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа. Существует ли такое k , при котором Маша сможет справиться с этой задачей?
3. Дано $2n - 1$ попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n - 1)^2$. Докажите, что среди них обязательно есть простое число.
4. В каждой вершине правильного 100-угольника записали по одному натуральному числу, причём все записанные числа различны. Вадим разделил каждое из них с остатком на следующее по часовой стрелке; оказалось, что остатки, полученные Вадимом, принимают всего два различных значения. Лена разделила каждое из чисел с остатком на следующее против часовой стрелки. Докажите, что все остатки, полученные Леной, различны.
5. По кругу расставлены 2025^{2025} натуральных чисел. Для любых двух соседних чисел Артемий записал себе в тетрадку их НОК. Могло ли оказаться так, что все 2025^{2025} чисел в тетрадке Артемия являются последовательными натуральными числами (идущими в некотором порядке)?
6. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ число

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

не является целым.

7. Найдите все такие нечётные натуральные $n > 1$, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a + b - 1$ также является делителем n .