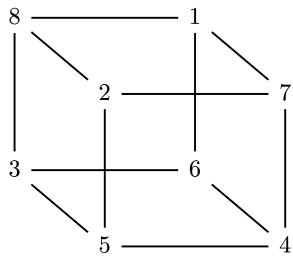
Диагностическая работа. Дистанционный этап.

Задача 1. Лена записала в вершинах куба натуральные числа от 1 до 8 (каждое по одному разу). На каждом ребре куба она записала число, равное сумме чисел в концах этого ребра. Оказалось, что наибольшее из чисел, записанных на рёбрах куба, равно n. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: 11

Решение. В одной из вершин куба Лена записала число 8. Поскольку из каждой вершины куба исходит три ребра, найдётся ребро, соединяющее вершину с числом 8 с вершиной, в которой записано число не меньше 3. Значит, $n \geqslant 8 + 3 = 11$.

Пример для $n = 11$ изображён на рисунке ниже.



□

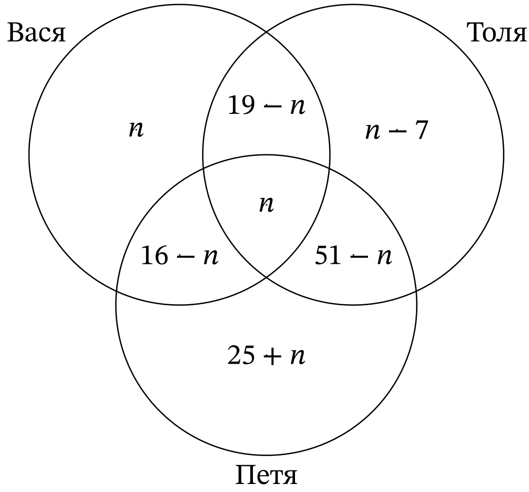
Задача 2.1. Петя, Вася и Толя целый год решали задачи на математическом кружке. Оказалось, что за год Петя решил 92 задачи, Вася — 35 задач, а Толя — 63 задачи. Также известно, что ровно 16 задач были решены и Петей, и Васей, ровно 51 задача — и Петей, и Толей, и наконец, ровно 19 задач — и Васей, и Толей. Обозначим n число задач, решённых и Петей, и Васей, и Толей. Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 7

Решение. Для упрощения понимания решения этой задачи полезно нарисовать диаграмму (круги) Эйлера (см. рисунок ниже).

Так как среди 16 задач, решённых и Петей, и Васей, ровно n задач, решённых ещё и Толей, то задач, решённых Петей и Васей, но не Толей, ровно $16 - n$ штук. Аналогично $51 - n$ задач были решены Петей и Толей, но не Васей, и $19 - n$ задач были решены Васей и Толей, но не Петей.

Далее, число задач, решённых только Петей, равно $92-n-(16-n)-(51-n) = 25+n$. Аналогично число задач, решённых только Васей, равно $35-n-(19-n)-(16-n) = n$, и число задач, решённых только Толей, равно $63 - n - (51 - n) - (19 - n) = n - 7$.



Число задач, решённых каждым из мальчиков, могло равняться n тогда и только тогда, когда все найденные величины $16-n, 51-n, 19-n, 25+n, n, n-7$ неотрицательны. Значит, наименьшее возможное значение n равно 7. □

Задача 2.2. Петя, Вася и Толя целый год решали задачи на математическом кружке. Оказалось, что за год Петя решил 83 задачи, Вася — 36 задач, а Толя — 62 задачи. Также известно, что ровно 15 задач были решены и Петей, и Васей, ровно 49 задач — и Петей, и Толей, и наконец, ровно 21 задача — и Васей, и Толей. Обозначим n число задач, решённых всеми тремя мальчиками. Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 8

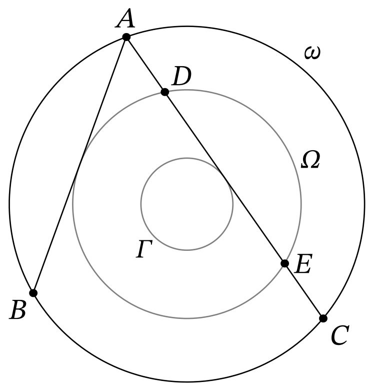
Задача 2.3. Петя, Вася и Толя целый год решали задачи на математическом кружке. Оказалось, что за год Петя решил 87 задач, Вася — 39 задач, а Толя — 61 задачу. Также известно, что ровно 17 задач были решены и Петей, и Васей, ровно 48 задач — и Петей, и Толей, и наконец, ровно 22 задачи — и Васей, и Толей. Обозначим n число задач, решённых всеми тремя мальчиками. Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 9

Задача 2.4. Петя, Вася и Толя целый год решали задачи на математическом кружке. Оказалось, что за год Петя решил 85 задач, Вася — 39 задач, а Толя — 60 задач. Также известно, что ровно 18 задач были решены и Петей, и Васей, ровно 47 задач — и Петей, и Толей, и наконец, ровно 23 задачи — и Васей, и Толей. Обозначим n число задач, решённых всеми тремя мальчиками. Какое наименьшее значение может принимать n?

Ответ: 10

Задача 3.1. Окружности ω, Ω и Γ имеют общий центр, причём окружность Γ находится внутри окружности Ω, а окружность Ω — внутри окружности ω. Точки A, B и C лежат на окружности ω, отрезок AC пересекает окружность Ω в точках D и E. Оказалось, что отрезок AB касается окружности Ω, а отрезок AC касается окружности Γ (см. рис.). Известно, что $AB = 21, AC = 29$, найдите длину отрезка DE.



Ответ: 20

Решение. Обозначим r_ω, r_Ω и r_Γ радиусы окружностей ω, Ω и Γ соответственно. Пусть точка O является центром всех трёх окружностей из условия. Обозначим X точку касания отрезка AB с окружностью Ω. В равнобедренном треугольнике OAB отрезок OX является высотой (радиус перпендикулярен касательной), а значит, и медианой. Таким образом, $AB = 2AX$. По теореме Пифагора для треугольника AXO имеем

$$AX^2 = AO^2 - XO^2 = r_\omega^2 - r_\Omega^2.$$

Значит,

$$AB^2 = 4(r_\omega^2 - r_\Omega^2).$$

Аналогичным образом

$$AC^2 = 4(r_\omega^2 - r_\Gamma^2), \qquad DE^2 = 4(r_\Omega^2 - r_\Gamma^2).$$

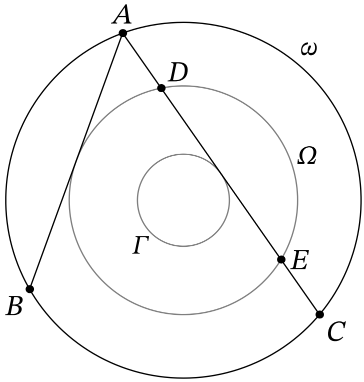
Осталось заметить, что

$$DE^2 = 4(r_\Omega^2 - r_\Gamma^2) = 4(r_\omega^2 - r_\Gamma^2) - 4(r_\omega^2 - r_\Omega^2) = AC^2 - AB^2 = 29^2 - 21^2 = 400,$$

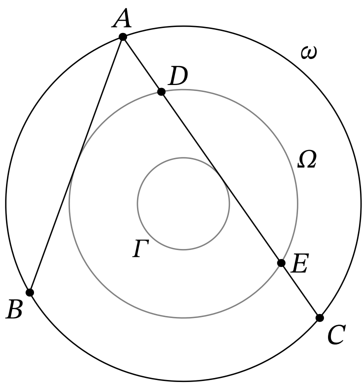
откуда $DE = 20$. □

Задача 3.2. Окружности ω, Ω и Γ имеют общий центр, причём окружность Γ находится внутри окружности Ω, а окружность Ω — внутри окружности ω. Точки A, B и C лежат на окружности ω, отрезок AC пересекает окружность Ω в точках D и E. Оказалось, что отрезок AB касается окружности Ω, а отрезок AC касается окружности Γ (см. рис.). Найдите длину отрезка DE, если известно, что $AB = 35, AC = 37$.

Ответ: 12



Задача 3.3. Окружности ω, Ω и Γ имеют общий центр, причём окружность Γ находится внутри окружности Ω, а окружность Ω — внутри окружности ω. Точки A, B и C лежат на окружности ω, отрезок AC пересекает окружность Ω в точках D и E. Оказалось, что отрезок AB касается окружности Ω, а отрезок AC касается окружности Γ (см. рис.). Найдите длину отрезка DE, если известно, что $AB = 45, AC = 53$.



Ответ: 28

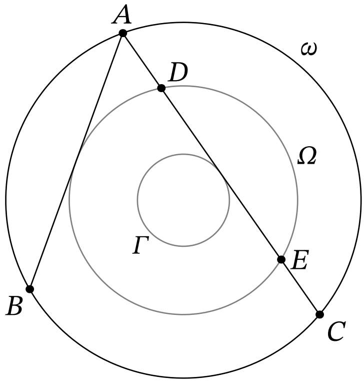
Задача 3.4. Окружности ω, Ω и Γ имеют общий центр, причём окружность Γ находится внутри окружности Ω, а окружность Ω — внутри окружности ω. Точки A, B и C лежат на окружности ω, отрезок AC пересекает окружность Ω в точках D и E. Оказалось, что отрезок AB касается окружности Ω, а отрезок AC касается окружности Γ (см. рис.). Найдите длину отрезка DE, если известно, что $AB = 32, AC = 40$.

Ответ: 24

Задача 4. Найдите количество способов выбрать три различных числа из набора

$$10^1 + 1, 10^2 + 1, 10^3 + 1, 10^4 + 1, 10^5 + 1, 10^6 + 1, 10^7 + 1$$

так, чтобы в десятичной записи их произведения встречались только цифры 0 или 1.



Ответ: 26

Решение. Рассмотрим произведение $(10^a+1)(10^b+1)(10^c+1)$, где $1 \leqslant c < b < a \leqslant 7$. Раскрыв скобки

$$(10^a+1)(10^b+1)(10^c+1) = 10^{a+b+c} + 10^{a+b} + 10^{c+a} + 10^{b+c} + 10^a + 10^b + 10^c + 1,$$

нетрудно увидеть, что рассматриваемое произведение состоит только из цифр 0 и 1 тогда и только тогда, когда все числа $a+b+c, a+b, b+c, c+a, c, b, a, 0$ различны. Ввиду цепочки строгих неравенств

$$a+b+c > a+b > c+a > b+c > b > c > 0,$$

единственное число, которое может встречаться дважды, равно a. Поскольку, кроме того, $c+a > a > b$, то число a может равняться только числу $b+c$.

Таким образом, чтобы найти ответ, необходимо из числа всех способов выбрать три числа вычесть те способы, для которых $a = b+c$. Число способов выбрать из 7-элементного множества 3 элемента равно

$$C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Все способы, для которых $a = b+c$ перечислены ниже:

- $c = 1, b = 2, a = 3;$
- $c = 1, b = 3, a = 4;$
- $c = 1, b = 4, a = 5;$
- $c = 1, b = 5, a = 6;$
- $c = 1, b = 6, a = 7;$
- $c = 2, b = 3, a = 5;$
- $c = 2, b = 4, a = 6;$
- $c = 2, b = 5, a = 7;$
- $c = 3, b = 4, a = 7.$

Всего таких способов 9, поэтому ответ равен $35 - 9 = 26$. □

Задача 5.1. На плоскости даны 42 прямых, среди которых нет параллельных. Для натурального числа $k \geqslant 2$ обозначим n_k количество точек, через которые проходит ровно k прямых. Оказалось, что на плоскости нет точек, через которые проходит хотя бы семь прямых, а $n_3 = 3, n_4 = 4, n_5 = 5, n_6 = 6$. Найдите все возможные значения n_2.

Ответ: 688

Решение. Посчитаем двумя способами число пар данных прямых. С одной стороны, оно равно

$$C_{42}^2 = \frac{42 \cdot 41}{2} = 861.$$

С другой стороны, любые две данные прямые пересекаются, поэтому для каждой точки плоскости можно посчитать число пар прямых, пересекающихся в этой точке, и сложить все полученные числа. Таким образом, мы установили равенство

$$n_2 + n_3 C_3^2 + n_4 C_4^2 + n_5 C_5^2 + n_6 C_6^2 = 861,$$

откуда после подстановки $n_3 = 3, n_4 = 4, n_5 = 5, n_6 = 6$ находим $n_2 = 688$.

□

Задача 5.2. На плоскости даны 43 прямых, среди которых нет параллельных. Для натурального числа $k \geqslant 2$ обозначим n_k количество точек, через которые проходит ровно k прямых. Оказалось, что на плоскости нет точек, через которые проходит хотя бы семь прямых, а $n_3 = 3, n_4 = 4, n_5 = 5, n_6 = 6$. Найдите все возможные значения n_2.

Ответ: 730

Задача 5.3. На плоскости даны 44 прямых, среди которых нет параллельных. Для натурального числа $k \geqslant 2$ обозначим n_k количество точек, через которые проходит ровно k прямых. Оказалось, что на плоскости нет точек, через которые проходит хотя бы семь прямых, а $n_3 = 3, n_4 = 4, n_5 = 5, n_6 = 6$. Найдите все возможные значения n_2.

Ответ: 773

Задача 5.4. На плоскости даны 45 прямых, среди которых нет параллельных. Для натурального числа $k \geqslant 2$ обозначим n_k количество точек, через которые проходит ровно k прямых. Оказалось, что на плоскости нет точек, через которые проходит хотя бы семь прямых, а $n_3 = 3, n_4 = 4, n_5 = 5, n_6 = 6$. Найдите все возможные значения n_2.

Ответ: 817

Задача 6.1. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Внутри треугольника нашлась такая точка P, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ и $BP = 8$. Найдите площадь треугольника APC.

Ответ: 32

Решение. Обозначим $\alpha = \angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Тогда $\angle PBA = \angle CBA - \angle PBC = 45° - \alpha$, $\angle PCA = \angle BCA - \angle PCA = 45° - \alpha$, так что треугольники PBA и PCB подобны по двум углам. Коэффициент подобия этих треугольников равен $BC/AB = \sqrt{2}$ (по теореме Пифагора для треугольника ABC выполнено $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AB^2$). Значит, $AP = BP/\sqrt{2}$ и $CP = BP \cdot \sqrt{2}$.

Так как $\angle CAP = \angle CAB - \angle PAB = 90° - \angle PAB = 90° - \alpha$ и $\angle PCA = \alpha$, то $\angle APC = 90°$. Наконец, искомая площадь треугольника APC равна половине произведения катетов

$$S_{APC} = \frac{AP \cdot CP}{2} = \frac{BP^2}{2} = 32.$$

□

Задача 6.2. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Внутри треугольника нашлась такая точка P, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ и $BP = 10$. Найдите площадь треугольника APC.

Ответ: 50

Задача 6.3. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Внутри треугольника нашлась такая точка P, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ и $BP = 12$. Найдите площадь треугольника APC.

Ответ: 72

Задача 6.4. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Внутри треугольника нашлась такая точка P, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ и $BP = 6$. Найдите площадь треугольника APC.

Ответ: 18

Задача 7. Различные простые числа p, q, r таковы, что

$$2pqr + 50pq = 7pqr + 55pr = 8pqr + 12qr = N$$

для некоторого натурального числа N. Какое наибольшее значение может принимать число N?

Ответ: 1980

Решение. Из цепочки равенств в условии следует, что число N делится на p, на q и на r. Так как числа p, q, r попарно взаимно просты, то N делится на pqr.

Поделим все равенства из условия на pqr и получим

$$2 + \frac{50}{r} = 7 + \frac{55}{q} = 8 + \frac{12}{p} = \frac{N}{pqr}.$$

Так как все числа $2 + \frac{50}{r}, 7 + \frac{55}{q}, 8 + \frac{12}{p}$ являются целыми, то $r = 2$ или $r = 5$, $q = 5$ или $q = 11$, $p = 2$ или $p = 3$. Если $r = 2$, то

$$7 + \frac{55}{q} = 2 + \frac{50}{r} = 27,$$

что невозможно. Значит, $r = 5$ и

$$7 + \frac{55}{q} = 8 + \frac{12}{p} = 12,$$

откуда $q = 11$, $p = 3$ и $N = 1980$.

□

Задача 8.1. Петя и Вася играют в следующую игру. Изначально перед ними лежит куча из n монет, за один ход игрок может забрать из кучи либо одну монету, либо четыре монеты (если в куче есть хотя бы четыре монеты). Ходы делаются по очереди, первым начинает Петя. Побеждает тот, кто заберёт последнюю монету. Найдите количество натуральных значений n, не превосходящих 2024, при которых побеждает Вася.

Ответ: 809

Решение. Рассмотрим остаток от деления n на 5. Разберём несколько случаев.

При значениях n, кратных пяти, побеждает Вася. В самом деле, ему достаточно каждый раз дополнять количество монет, взятое Петей на предыдущем ходе, до пяти (то есть забирать четыре монеты, если Петя забрал одну, и забирать одну монету, если Петя забрал четыре). Действуя таким образом, после каждого очередного хода Васи в куче будет оставаться число монет, кратное пяти, и рано или поздно Вася обеспечит себе победу.

Если число n даёт остаток 1 от деления на 5, то побеждает Петя. В самом деле, на первом ходу ему достаточно взять из кучи одну монету, после чего в куче останется кратное пяти число монет, и Петя может действовать по выше описанной стратегии для Васи, гарантируя себе победу. Аналогично, если n даёт остаток 4 от деления на 5, то Петя может победить, забрав на первом ходу 4 монеты.

Если число n даёт остаток 2 при делении на 5, то побеждает Вася. В самом деле, каждый раз дополняя количество монет, взятое Петей на предыдущем ходе, до пяти, он добьётся того, что в какой-то момент в куче останется 2 монеты. Петя будет обязан забрать одну монету, и, забрав оставшуюся монету, Вася победит.

Наконец, если число n даёт остаток 3 от деления на 5, то побеждает Вася. В самом деле, на первом ходу ему достаточно забрать из кучи одну монету, а далее он может действовать по стратегии Васи, описанной в случае с остатком 2.

Значит, число значений n, при которых побеждает Вася, равно количеству натуральных чисел, не превосходящих 2024, и дающих остаток 0 или 2 от деления на 5. Нетрудно видеть, что количество таких чисел равно 404 и 405 соответственно. Таким образом, ответ на задачу равен $404 + 405 = 809$. $\square$

Задача 8.2. Петя и Вася играют в следующую игру. Изначально перед ними лежит куча из n монет, за один ход игрок может забрать из кучи либо одну монету, либо четыре монеты (если в куче есть хотя бы четыре монеты). Ходы делаются по очереди, первым начинает Петя. Побеждает тот, кто заберёт последнюю монету. Найдите количество натуральных значений n, не превосходящих 2019, при которых побеждает Вася.

Ответ: 807

Задача 8.3. Петя и Вася играют в следующую игру. Изначально перед ними лежит куча из n монет, за один ход игрок может забрать из кучи либо одну монету, либо четыре монеты (если в куче есть хотя бы четыре монеты). Ходы делаются по очереди, первым начинает Петя. Побеждает тот, кто заберёт последнюю монету. Найдите количество натуральных значений n, не превосходящих 2014, при которых побеждает Вася.

Ответ: 805

Задача 8.4. Петя и Вася играют в следующую игру. Изначально перед ними лежит куча из n монет, за один ход игрок может забрать из кучи либо одну монету, либо четыре монеты (если в куче есть хотя бы четыре монеты). Ходы делаются по очереди, первым начинает Петя. Побеждает тот, кто заберёт последнюю монету. Найдите количество натуральных значений n, не превосходящих 2009, при которых побеждает Вася.

Ответ: 803

Задача 9.1. На описанной окружности квадрата $ABCD$ выбрана точка P. Оказалось, что $PA \cdot PC = 56$ и $PB \cdot PD = 90$. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

Ответ: 106

Решение. Обозначим O центр квадрата, r — радиус описанной окружности квадрата. По теореме Пифагора для треугольника AOB имеем $r^2 + r^2 = AB^2$, поэтому $r \cdot \sqrt{2} = AB$, и площадь квадрата $ABCD$ равна $2r^2$.

Теперь наша задачи состоит в том, чтобы найти значение r. Опустим из точки P перпендикуляры PX и PY на диагонали квадрата AC и BD соответственно. Поскольку отрезки AC и BD являются диаметрами описанной окружности квадрата $ABCD$, имеем $\angle APC = \angle BPD = 90°$. Значит, площадь треугольника APC равна $S_{APC} = AP \cdot CP/2 = 28$. С другой стороны, та же площадь равна $S_{APC} = PX \cdot AC/2 = PX \cdot r$, откуда

$$PX = \frac{28}{r}.$$

Аналогичным образом

$$PY = \frac{45}{r}.$$

В четырёхугольнике $PXOY$ углы PXO, XOY и OYP прямые, поэтому этот четырёхугольник является прямоугольником. Значит, $XO = PY = \frac{45}{r}$. По теореме Пифагора для треугольника POX имеем

$$r^2 = \left(\frac{45}{r}\right)^2 + \left(\frac{28}{r}\right)^2,$$

откуда

$$r^4 = 45^2 + 28^2 = 53^2.$$

Значит, $2r^2 = 2 \cdot 53 = 106$. □

Задача 9.2. На описанной окружности квадрата $ABCD$ выбрана точка P. Оказалось, что $PA \cdot PC = 28$ и $PB \cdot PD = 96$. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

Ответ: 100

Задача 9.3. На описанной окружности квадрата $ABCD$ выбрана точка P. Оказалось, что $PA \cdot PC = 39$ и $PB \cdot PD = 80$. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

Ответ: 89

Задача 9.4. На описанной окружности квадрата $ABCD$ выбрана точка P. Оказалось, что $PA \cdot PC = 24$ и $PB \cdot PD = 70$. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

Ответ: 74

Задача 10.1. Последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \quad \text{при } n = 1, 2, \ldots, 97.$$

Кроме того, известно, что $a_1 = a_3 = 1$ и $a_{98} = a_{99}$. Вычислите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

Ответ: 3

Решение. Чтобы найти сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$, воспользуемся условием и выразим каждое слагаемое (начиная с a_4) через три предыдущих. Получим

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + (a_1 - 2a_2 + a_3) + (a_2 - 2a_3 + a_4) + \ldots + \\ + (a_{97} - 2a_{98} + a_{99}).$$

Нетрудно видеть, что в правой части равенства сократятся все слагаемые a_i, кроме a_1, a_3, a_{98} и a_{99}. Таким образом, искомая сумма равна

$$2a_1 + a_3 - a_{98} + a_{99} = 3.$$

□

Задача 10.2. Последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \quad \text{при } n = 1, 2, \ldots, 97.$$

Кроме того, известно, что $a_1 = a_3 = 2$ и $a_{98} = a_{99}$. Вычислите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

Ответ: 6

Задача 10.3. Последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \quad \text{при } n = 1, 2, \ldots, 97.$$

Кроме того, известно, что $a_1 = a_3 = 3$ и $a_{98} = a_{99}$. Вычислите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

Ответ: 9

Задача 10.4. Последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \quad \text{при } n = 1, 2, \ldots, 97.$$

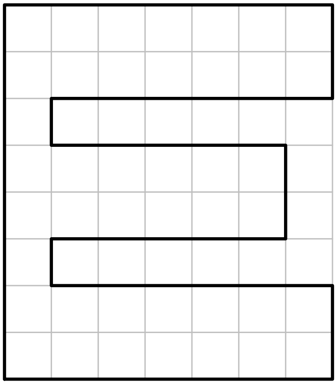
Кроме того, известно, что $a_1 = a_3 = 4$ и $a_{98} = a_{99}$. Вычислите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

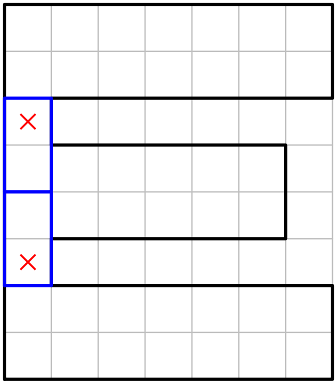
Ответ: 12

Задача 11.1. Сколькими способами можно разбить клетчатую фигуру ниже на доминошки 1×2?

Ответ: 3528

Решение. Рассмотрим две клетки, отмеченные красным крестиком на рисунке ниже.





Если фигуру удалось разбить на доминошки, то отмеченные клетки обязаны принадлежать доминошкам, обведённым синим цветом. В самом деле, если хотя бы одна из отмеченных клеток принадлежит другой доминошке, то эта доминошка поделит фигуру на две части, каждая из которых состоит из нечётного числа клеток. Разбить эти части на доминошки не получится.

Итак, мы выяснили, что доминошки, обведённые синим цветом, присутствуют в любом разбиении. Они делят фигуру на три части: два прямоугольника 2×7 и прямоугольник 2×5. Чтобы найти ответ на задачу, необходимо найти число способов разбить каждую из трёх частей на доминошки и перемножить три полученных числа.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Число способов разбить клетчатый прямоугольник $2 \times n$ на доминошки 1×2 равно F_{n+1}, где F_n — это n-е число Фибоначчи. Напомним, что последовательность чисел Фибоначчи определяется условиями $F_1 = 1, F_2 = 1$ и соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для любого натурального n.

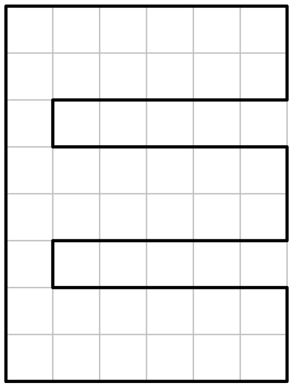
Доказательство леммы. Докажем лемму индукцией по n. В качестве базы нам понадобятся значения $n = 1$ и $n = 2$, для которых утверждение леммы очевидно выполнено.

Предположим, что утверждение леммы доказано для всех прямоугольников $2 \times m$, где $m < n$. Докажем утверждение для прямоугольника $2 \times n$ (считаем, что $n \geqslant 3$). Рассмотрим две самые правые клетки в прямоугольнике. Если они принадлежат одной и той же вертикальной доминошке, то число способов разбить на доминошки оставшийся прямоугольник $2 \times (n-1)$ равно F_n по предположению индукции. Если же одна из правых клеток принадлежит горизонтальной доминошке, то и вторая клетка также принадлежит горизонтальной доминошке, и число способов разбить на доимношки оставшийся прямоугольник $2 \times (n-2)$ равно F_{n-1}. Таким образом, число способов разбить на доминошки прямоугольник $2 \times n$ равно $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$, и переход индукции доказан. □

Вернёмся к решению задачи. По доказанной лемме число способов разбить на доминошки прямоугольник 2×7 равно $F_8 = 21$, а число способов разбить на доминошки прямоугольник 2×5 равно $F_6 = 8$. Значит, ответ на задачу равен $21^2 \cdot 8 = 3528$.

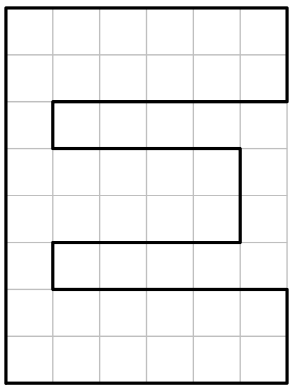
□

Задача 11.2. Сколькими способами можно разбить клетчатую фигуру ниже на доминошки 1×2?



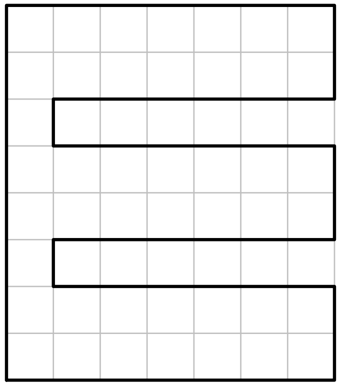
Ответ: 1352

Задача 11.3. Сколькими способами можно разбить клетчатую фигуру ниже на доминошки 1×2?



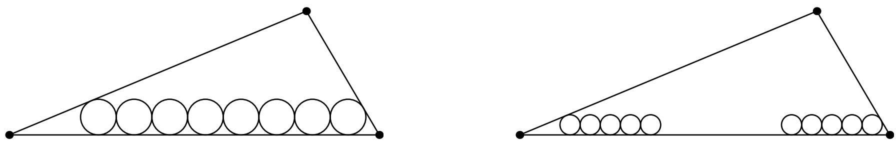
Ответ: 845

Задача 11.4. Сколькими способами можно разбить клетчатую фигуру ниже на доминошки 1×2?



Ответ: 5733

Задача 12.1. Дан остроугольный треугольник ABC. Восемь окружностей радиуса 34 касаются стороны BC, каждая следующая окружность касается предыдущей, а первая и последняя окружности касаются сторон AB и AC соответственно (см. рисунок слева). Известно, что таким же образом можно расположить 2024 окружности радиуса 1 (см. рисунок справа). Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.



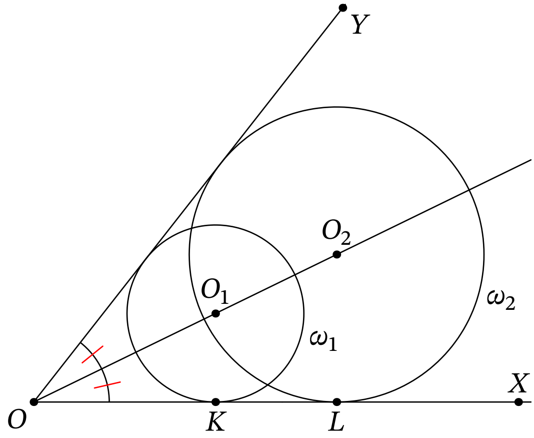
Ответ: $\frac{192}{5}$

Решение. Для начала нам понадобится следующая лемма.

Лемма. В угол XOY вписаны окружности ω_1 и ω_2 с радиусами r_1 и r_2 соответственно. Обозначим K и L точки касания прямой OX с окружностями ω_1 и ω_2 соответственно. Тогда выполнено равенство

$$\frac{OK}{OL} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Доказательство леммы. Поскольку обе окружности ω_1 и ω_2 касаются прямых OX и OY, оба центра окружностей (обозначим их O_1 и O_2) равноудалены от этих прямых, и значит, оба лежат на биссектрисе угла XOY.



Заметим также, что $\angle O_1KO = \angle O_2LO = 90^\circ$ ввиду касания. Значит, треугольники OO_1K и OO_2L подобны по трём углам. Тем самым мы установили требуемое равенство

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1K}{O_2K} = \frac{OK}{OL},$$

и лемма доказана. □

Теперь вернёмся к решению задачи. Для начала рассмотрим 2024 последовательно касающиеся окружности из условия. Обозначим B' и C' точки касания 1-й и 2024-й окружностей со стороной BC соответственно. Нетрудно видеть, что четыре точки B', C' и центры 1-й и 2024-й окружностей образуют прямоугольник. Таким образом, $B'C' = 4046$ (длина отрезка, соединяющего центры 1-й и 2024-й окружностей, равна общей сумме радиусов 1-й и 2024-й окружностей и диаметров всех оставшихся окружностей). Обозначим $b = BB'$ и $c = CC'$. Таким образом, мы установили равенство

$$BC = BB' + B'C' + C'C = 4046 + b + c.$$

Теперь рассмотрим 8 последовательно касающихся окружностей из условия. Аналогично обозначим B'' и C'' точки касания 1-й и 8-й окружностей с BC. По аналогичным причинам имеет место равенство $B''C'' = 14 \cdot 34 = 476$, а по доказанной лемме

$$\frac{BB''}{BB'} = \frac{34}{1} = \frac{CC''}{CC'},$$

так что $BB'' = 34b$ и $CC'' = 34c$. Таким образом,

$$BC = BB'' + B''C'' + C''C = 476 + 34(b + c).$$

Значит,

$$4046 + (b + c) = 476 + 34(b + c),$$

откуда $b + c = \frac{1190}{11}$.

Наконец, рассмотрим вписанную окружность треугольника ABC и обозначим r её радиус, а K точку касания этой окружности со стороной BC. По доказанной лемме

$$\frac{BK}{BB'} = \frac{r}{1} = \frac{CK}{CC'},$$

так что $BK = b \cdot r$ и $CK = c \cdot r$, а также

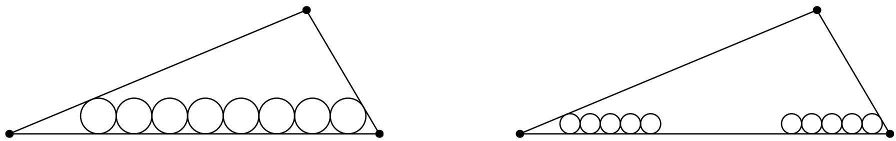
$$4046 + (b + c) = BC = BK + CK = (b + c)r.$$

Отсюда

$$r = 1 + \frac{4046}{b + c} = \frac{192}{5}.$$

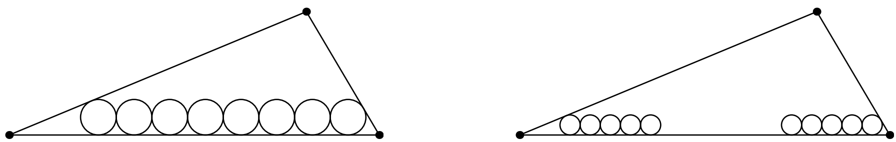
□

Задача 12.2. Дан остроугольный треугольник ABC. Восемь окружностей радиуса 34 касаются стороны BC, каждая следующая окружность касается предыдущей, а первая и последняя окружности касаются сторон AB и AC соответственно (см. рисунок слева). Известно, что таким же образом можно расположить 1429 окружности радиуса 1 (см. рисунок справа). Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.



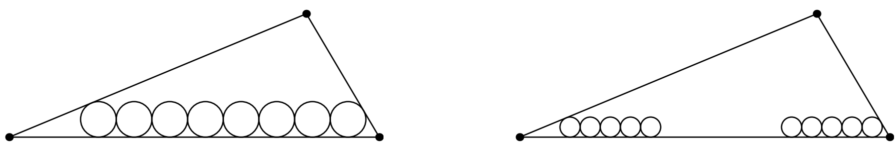
Ответ: $\frac{203}{5}$

Задача 12.3. Дан остроугольный треугольник ABC. Восемь окружностей радиуса 34 касаются стороны BC, каждая следующая окружность касается предыдущей, а первая и последняя окружности касаются сторон AB и AC соответственно (см. рисунок слева). Известно, что таким же образом можно расположить 3809 окружностей радиуса 1 (см. рисунок справа). Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.



Ответ: $\frac{181}{5}$

Задача 12.4. Дан остроугольный треугольник ABC. Восемь окружностей радиуса 34 касаются стороны BC, каждая следующая окружность касается предыдущей, а первая и последняя окружности касаются сторон AB и AC соответственно (см. рисунок слева). Известно, что таким же образом можно расположить 1667 окружностей радиуса 1 (см. рисунок справа). Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.



Ответ: $\frac{79}{2}$